UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DO TRABALHO E DA EMPRESA
DEPARTAMENTO DE FINANÇAS

Avaliação de Opções Barreira sob Volatilidade Estocástica

Duarte Miguel Carvalho Bettencourt

Mestrado em Matemática Financeira

Dissertação orientada por:
Professor Doutor José Carlos Gonçalves Dias

2019

Agradecimentos

Antes de mais, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor José Carlos Gonçalves Dias pelo apoio ao longo da realização deste trabalho. Um obrigado por rever as sucessivas versões da tese e por todas as sugestões dadas. Obrigado pelo incentivo dado na reta final para concluir esta tese.

Quero agradecer a todos os meus amigos por sempre acreditarem em mim e que sempre me encorajaram e motivaram a continuar.

Um agradecimento especial à minha equipa de trabalho por todo o apoio e palavras de incentivo e que nos momentos menos bons sempre me encorajaram.

Um agradecimento muito especial à minha família, que apesar de distantes, sempre me apoiaram em todos os momentos e a quem eu devo todas as oportunidades que hoje se me apresentam.

Obrigado a todos por acreditarem em mim! Muito Obrigado!

Resumo

Um dos modelos mais utilizados em finanças, o modelo de Black e Scholes (1973) e Merton (1973), demonstra-se ineficaz na avaliação de opções financeiras, incluindo as opções barreira, pois assume uma taxa de juro e volatilidade constantes, o que não acontece nos mercados financeiros. Assim, neste trabalho optou-se por fazer um estudo na avaliação de opções com barreira usando modelos que consideram variações de volatilidade para fazer face às exigências do mercado. Os modelos de Heston (1993), Stein e Stein (1991), Christoffersen et al (2009) e Barndorff-Nielsen e Shephard (2001) são os modelos de volatilidade estocástica discutidos ao longo da tese. Em particular, o modelo Heston (1993) que merece destaque por grande parte da comunidade académica e científica pela fiabilidade dos seus resultados.

Numa fase final comprovamos os resultados obtidos comparando-os através de alguns métodos de integração, nomeadamente as quadraturas Gaussianas, a regra de Simpson e a regra do Trapézio, como também um algoritmo muito eficiente, a transformada rápida de Fourier(FFT).

Palavras-Chave: Opções com barreira, digital options, transformada rápida de Fourier, Representações com time-change

Abstract

One of the most used models in finance, the Black and Scholes (1973) and Merton (1973) model, is known to produce inacurate results in evaluating options because it assumes constant volatility, which does not fit the financial markets.Therefore, in this paper, we chose to study the valuation of barrier options using models that consider volatility variations to meet market demands. The models based on Heston (1993), Stein and Stein (1991), Christoffersen et al (2009) and Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) are the models of stochastic volatility discussed throughout the thesis. In particular, the Heston (1993) model that deserves special attention from the majority of the academic and scientific community for the reliability of its results.

In a final phase, we prove the results obtained by comparing them through some integration methods, namely Gaussian quadratures, Simpson's rule and Trapezoidal's rule as well as a very efficient algorithm, the Fourier Fast Transform (FFT).

Keywords: Barrier options, digital options, fast Fourier transform, time-change representation

Conteúdo

Lista de Tabelas

1. Introdução

As opções são contratos financeiros que dão o direito (mas não a obrigação) de comprar (call option) ou de vender (put option) uma dada quantidade (contract size) de um dado ativo financeiro (ativo subjacente) e a um preço pré-determinado (preço de exercício). Estas opções podem ser de estilo europeu, caso o detentor da opção possa exercer o direito apenas no vencimento do contrato, ou de estilo Americano, caso o direito possa ser exercido em qualquer instante desde o momento em que o contrato é celebrado até à sua maturidade.

As opções exóticas são opções financeiras não-standard (em termos do ativo subjacente, do preço de exercício, etc.) que são negociadas nos mercados over-the-counter (OTC) e, mais frequentemente, incorporadas em produtos estruturados.

As opções barreira são um tipo de opções exóticas onde o direito de exercício do contrato depende de o preço do ativo subjacente atingir ou não um(ns) determinado(s) nível(s), designado(s) por barreira(s). Quando as opções têm apenas uma barreira são designadas como single barrier; se tiverem duas barreiras distintas (inferior e superior) são designadas como double barrier.

Existem duas categorias de opções com barreira única: knock-in e knock-out. As opções knock-in são ativadas apenas quando o preço do ativo subjacente atinge a barreira e o seu payoff terminal é igual à de uma opção Europeia regular; caso contrário, um rebate (possivelmente zero) é pago. As opções knock-out extinguem assim que o preço do ativo subjacente atinge a barreira e o seu payoff terminal é igual à de uma opção Europeia regular se a barreira nunca for alcançada; caso contrário, um rebate (possivelmente zero) é pago. As opções barreira podem ser divididas em:

- Up-and-in: o preço do ativo subjacente começa abaixo do nível da barreira e tem que subir e tocar na barreira para que a opção se torne ativa.

- Up-and-out: o preço do ativo subjacente começa abaixo do nível da barreira e tem que subir e tocar na barreira para que a opção se extinga.

- Down-and-in: o preço do ativo subjacente começa acima do nível da barreira e tem que descer e tocar na barreira para que a opção se torne ativa.

- Down-and-out: o preço do ativo subjacente começa acima do nível da barreira e tem que descer e tocar na barreira para que a opção se extinga.

Qualquer um destes tipos de opções barreira pode ser uma call ou put option.

As double barrier options limitam o preço do ativo subjacente a variar num certo intervalo e também podem ser classificadas em knock-out, no qual basta que uma das barreiras seja atingida para que a opção se extinga, e knock-in, no qual basta que uma das barreiras seja atingida para que a opção se torne ativa.

As opções barreira são produtos muito populares visto serem menos dispendiosas do que as opções regulares.

Este trabalho incide num estudo de avaliação de opções down-and-out e opções com duas barreiras.

A tese encontra-se organizada da seguinte forma:

No capítulo 2 faz-se uma breve revisão de alguns resultados necessários para a avaliação das opções barreira para os capítulos seguintes.

No capítulo 3 é feito uma breve descrição de alguns modelos de volatilidade estocástica bem como a derivação das suas respetivas funções características.

No capítulo 4 procede-se à avaliação de diferentes derivados com uma e duas barreiras sendo apresentado os payoffs e respetivas fórmulas de avaliação.

O capítulo 5 dedica-se à avaliação de derivados com dupla barreira por séries infinitas de convergência rápida, uma alternativa ao exposto no capítulo 4

No capítulo 6 serão descritos e analisados os resultados obtidos, comparando-os com vários métodos como as quadraturas Gaussianas e a transformada rápida de Fourier.

1.1. Revisão de Literatura

Merton (1973) foi pioneiro na avaliação de opções e determinou uma solução fechada para a avaliação de opções com barreira, especificamente pela fórmula que desenvolveu para as opções de compra do tipo down-and-out. A origem da fórmula foi o modelo de Black e Scholes (1973), assumindo pressupostos de taxa de juro e de volatilidade constantes e de que o processo que representa a evolução do preço do ativo subjacente segue um movimento geométrico Browniano. Posteriormente, Rubinstein e Reiner (1991) derivaram as fórmulas para as oito tipos de opções com barreira simples.

Heynen e Kat (1994) desenvolveram um modelo analítico para avaliação de opções com dois ativos, com base numa distribuição normal bivariada para o preço dos dois ativos. Para este modelo tiveram em conta os pressupostos considerados no modelo de Black e Scholes (1973), porém considerados para dois ativos em vez de um. A fórmula de Heynen e Kat (1994) teve uma grande utilidade na avaliação de opções apenas com um ativo visto que permitiu admitir dois níveis distintos para a volatilidade desse ativo.

O emprego de métodos numéricos surgiu na avaliação de opções. Das diferentes técnicas numéricas utilizadas, o modelo binomial é o mais utilizado para obter um valor aproximado para o preço de uma opção. Boyle e Lau (1994) estudaram as opções barreira recorrendo ao modelo binomial e apresentaram uma metodologia para definir o que consideram o número ótimo de passos para a avaliação de opções visto que uma utilização descuidada do modelo binomial poderia levar a erros significativos. Também Ritchken (1995) chama a atenção aos problemas gerados pela utilização do modelo binomial desenvolvendo assim um modelo trinomial capaz de avaliar as opções com barreira de forma mais simples e eficiente.

Para além das técnicas numéricas também surgiram os modelos de simulação. Boyle (1977) foi pioneiro no emprego e desenvolvimento do modelo de Monte Carlo que simula o processo do preço do ativo subjacente e com base no pressuposto de neutralidade ao risco para obter numericamente o valor da opção. Johnson e Shanno (1987) também utilizam o método de Monte Carlo para a avaliação de opções, mas com a particularidade de que a volatilidade do ativo subjacente segue um comportamento estocástico.

O fato de no passado se considerar modelos de avaliação de opções que assumem pressupostos de taxa de juro e volatilidade constantes, atualmente têm sido alvo de fortes críticas e o mercado impõe exigências de uma forte necessidade de considerar as variações de volatilidade, fortemente dependente da maturidade e do preço de exercício das opções. Uma abordagem popular para permitir volatilidade variável no tempo é especificar que a volatilidade seja impulsionada pelo seu próprio processo estocástico. A dependência da volatilidade implícita em relação ao preço de exercício, para determinada maturidade, é conhecida com volatility smile, devido à curva evidenciada pelo gráfico da volatilidade implícita em função do preço de exercício.

Vários autores estudaram a avaliação de opções quando a volatilidade é estocástica. Os modelos de Hull e White(1987), Scott(1987), Wiggins(1987), Chensey e Scott(1989) e Stein e Stein(1991) estão entre os modelos de volatilidade estocástica mais significativos anteriores ao modelo de Heston(1993). O modelo de Heston(1993) não foi o primeiro modelo de volatilidade estocástica a ser introduzido no problema da avaliação de opções, mas tornou-se o mais importante e serve como referência com os muitos outros modelos de volatilidade estocástica.

2. Definições

Este capítulo destina-se a apresentar alguns conceitos e requesitos necessários para a avaliação de opções barreira.

2.1. Lema de Itô

O lema de Itô é uma ferramenta fundamental do cálculo estocástico. Este lema é usado para encontrar (e, muitas vezes, para resolver) a equação diferencial estocástica (EDE) seguida por uma função de um ou vários processos de Itô.

Definição 2.1.1. *Um processo estocástico $X(t)$ é um processo de Itô se pode ser representado como*

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW_t, \tag{2.1}$$

isto é,

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW_t, \tag{2.2}$$

onde $W(t)_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano, $\mu(t, X(t))$ e $\sigma(t, X(t))$ são processos adaptados.

O termo $\int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s$ da equação (2.2) é um integral de Itô, para o qual não podemos usar as regras usuais do cálculo ordinário - uma vez que o movimento Browniano não é diferenciável. Em oposição ao que acontece para as equações diferenciais ordinárias, a solução de EDE's requer, em geral, o uso de técnicas que são específicas para o cálculo estocástico, nomeadamente o lema de Itô.

Definição 2.1.2. *O integral estocástico*

$$I(t) := \int_0^t g(u)dW_u \tag{2.3}$$

é chamado um integral de Itô se W_t for um movimento Browniano padrão e $g(t) \in \pounds^2$.

O integral de Itô pode, como o integral de Riemann, ser aproximado por uma soma finita. Consideremos $\Pi := \{t_0, t_1, ...t_n\}$ uma partição do intervalo de tempo $[0, t]$, tal que $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$. Se $g(t) \in \mathcal{L}^2$ e $g(s) = g(t_k)$ para $s \in [t_k, t_{k+1}]$, então o integral de Itô pode ser definido da seguinte forma:

$$\int_0^t g(u)dW_u = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W_{t_{k+1}} - W_{t_k}]. \tag{2.4}$$

Se o limite existir, então o integral de Itô é:

$$\int_0^t g(u)dW_u = \lim_{n\to+\infty} \int_0^t g_n(u)dW_u. \tag{2.5}$$

No cálculo estocástico, a fórmula de Itô representa um resultado semelhante ao teorema fundamental do cálculo no clássico cálculo.

O teorema fundamental do cálculo garante que se $F(x)$ é uma primitiva de uma função contínua $f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

No cálculo estocástico, um resultante semelhante é obtido com a fórmula de Itô.

Teorema 2.1.1. *Seja $X(t)$ um processo de Itô como descrito na definição 2.1.1, e $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $C^{1,2}$. Então, para todo $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) =& f(0, X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} dt + \int_0^t \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} \mu(t, X(t))dt + \\ & \int_0^t \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} \sigma(t, X(t))dW_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial^2 x} \sigma^2(t, X(t))dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

ou, em notação diferencial,

$$\begin{aligned} df(t, X(t)) = & \left[\frac{\partial f(t, X(t))}{\partial t} + \mu(t, X(t)) \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X(t)) \frac{\partial^2 f(t, X(t))}{\partial^2 x} \right] dt + \\ & \sigma(t, X(t)) \frac{\partial f(t, X(t))}{\partial x} dW_t. \end{aligned} \tag{2.7}$$

A demonstração deste teorema é baseada na expansão de Taylor da função $f(t, X(t))$.

2.2. Movimento Browniano Geométrico

O processo estocástico $S(t)$ segue um movimento Browniano geométrico (GBM) se satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica (EDE):

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW_t^{\mathbb{P}}, \tag{2.8}$$

com $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, onde μ é o drift, σ é o desvio padrão da taxa de rentabilidade do ativo e $W_t^{\mathbb{P}}$ é o movimento Browniano padrão na medida física $\mathbb{P}$. O GBM é muito importante uma vez que é usado no modelo de Black e Scholes (1973) para representar o preço do ativo subjacente. Usando o lema de Itô à EDE (2.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} d\ln S(t) &= \frac{1}{S(t)}dS(t) + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{S^2(t)}\right] d\langle S, S\rangle(t) \\ &= \mu dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2(t)}\sigma^2 S^2(t) d\langle W^{\mathbb{P}}, W^{\mathbb{P}}\rangle(t) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma dW_t^{\mathbb{P}}. \end{aligned}$$

Integrando de ambos os lados entre 0 e t (≥ 0),

$$\begin{aligned} \ln S(t) - \ln S(0) &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t du + \sigma \int_0^t dW_u^{\mathbb{P}} \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}}, \end{aligned}$$

isto é,

$$S(t) = S(0)\exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma W_t^{\mathbb{P}}\right]. \tag{2.9}$$

Também podemos reescrever a equação (2.8) usando o teorema de Girsanov, obtendo-se

$$dS(t) = (r-q)S(t)dt + \sigma S(t)dW_t^{\mathbb{Q}}, \tag{2.10}$$

onde r representa a taxa de juro sem risco, q a dividend yield e $W_t^{\mathbb{Q}}$ é o movimento Browniano sob a medida neutra ao risco $\mathbb{Q}$.
Usando o lema de Ito à EDE (2.10) obtém-se

$$S(t) = S(0)\exp\left[\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}\right], \tag{2.11}$$

2.3. Modelos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973)

O modelo de Black e Scholes (1973) constitui o modelo pioneiro de avaliação de opções europeias sobre ações sem dividendos. Merton (1973) considera o caso do ativo subjacente pagar um dividend yield constante q.

Os modelos de Black e Scholes (1973) e Merton (1973) pressupõem que o preço do ativo subjacente segue um movimento Browniano geométrico dado pela equação (2.10) e uma volatilidade constante.

O modelo de Black-Scholes (1973) fornece uma solução analítica para o preço de uma call Europeia no momento t e pode ser descrita como segue:

$$C(S_t, t) = N(d_1)S_t e^{-q(T-t)} - N(d_2)Ke^{-r(T-t)} \tag{2.12}$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] \tag{2.13}$$

e

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{2.14}$$

onde:

- S_t é o preço spot do ativo subjacente no momento t;
- r é a taxa sem risco;
- q é a dividend yield;
- σ é a volatilidade da rentabilidade do ativo subjacente;
- $N(.)$ é a função distribuição acumulada da distribuição Gaussiana padrão;
- K é o preço de exercício;
- $T - t$ é tempo até à maturidade.

2.3.1. Limitações

Embora os modelos de Black-Scholes (1973) e Merton 1973, modelo BSM, sejam muito populares, existem implicações nos pressupostos do modelo de B-S que afetam os resultados e, consequentemente, são irrealistas. O principal pressuposto que não favorece é a volatilidade determinística (constante), que pode ser mais precisamente descrita como um processo estocástico uma vez que observamos que pequenos movimentos geralmente são seguidos por pequenos movimentos e grandes movimentos por grandes movimentos.

Outros pressupostos que são críticos para o modelo BSM, mas que nem sempre são observados na prática, referem-se à continuidade do ativo ao longo do tempo (sem saltos), sendo permitido realizar hedging contínuo sem custos de transação e retornos normais (Gaussianos).

A maioria dos modelos concentra-se no problema da volatilidade porque custos de transação geralmente implicam aumentos na volatilidade e que os retornos anormais podem ser simulados pela volatilidade estocástica e pelos saltos de mercado ou volatilidade.

2.4. Transformada de Fourier

A transformada de Fourier permite analisar de forma adequada funções não periódicas. A definição para a transformada de Fourier pode ser encontrada como um caso limite da série de Fourier.

Definição 2.4.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em L^1, isto é, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| < \infty$. Então a transformada de Fourier de f é definida por*

$$\widehat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx, \tag{2.15}$$

onde i é a unidade imaginária.

A função original pode ser obtida a partir de $\widehat{f}$ através da transformada inversa de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux} \widehat{f}(u) du. \tag{2.16}$$

A transformada de Fourier da derivada de f é

$$\widehat{f'}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f'(x) dx. \tag{2.17}$$

Integrando por partes obtém-se

$$\widehat{f'}(u) = e^{iux} f(x)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - iu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} f(x) dx = -iu\widehat{f}(u).$$

Aplicando a integração por partes mais uma vez mostra-se que

$$\widehat{f''}(u) = (-iu)^2 \widehat{f}(u).$$

A transformada de Fourier da derivada de ordem n é

$$\widehat{f^n}(u) = (-iu)^n \widehat{f}(u).$$

A derivada da transformada de Fourier é obtida derivando a integranda do integral da equação (2.15)

$$\frac{d\widehat{f}(u)}{du} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{du}\left(e^{iux} f(x)\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ixe^{iux} f(x) dx = i\widehat{g}(u), \tag{2.18}$$

onde $g(x) = xf(x)$.

2.5. Preço de uma European Call

O preço no momento t de uma European Call sobre uma ação que não paga dividendos com preço spot S_t, quando o strike é K e o tempo até à maturidade é $\tau = T - t$, é o valor esperado descontado do payoff sob a medida de risco neutra $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} C(K) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_T - K)^+\right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[(S_T - K) \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] \\ &= e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] - K e^{-r\tau} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] \\ &= S_t P_1 - K e^{-r\tau} P_2, \end{aligned} \tag{2.19}$$

onde $\mathbb{1}$ é a função indicadora. No modelo de Black e Scholes (1973) a última linha de (2.19) representa o preço de uma call, com $P_1 = N(d_1)$ e $P_2 = N(d_2)$. As quantidades P_1 e P_2 representam a probabilidade da call expirar in-the-money (mas em diferentes medidas de probabilidade), condicionada ao valor de $S_t = e^{x_t}$ e ao valor v_t da volatilidade no momento t, onde $x_t = \ln(S_t)$. Consequentemente

$$P_j = P_r(\ln S_T > \ln K), \tag{2.20}$$

para $j = 1, 2$. Estas probabilidades são obtidas sob diferentes medidas de probabilidade. Na equação (2.19), o valor esperado $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right]$ é a probabilidade da call expirar in-the-money sob a medida $\mathbb{Q}$.

Podemos escrever

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] = \mathbb{Q}(S_T > K) = \mathbb{Q}(\ln S_T > \ln K) = P_2.$$

Avaliar $e^{-r\tau}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right]$ requer uma alteração da medida original $\mathbb{Q}$ para a medida $\mathbb{Q}^S$. Consideremos a derivada de Radon-Nikodym dada por

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S} = \frac{B_T/B_t}{S_T/S_t} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{x_T}\right]}{e^{x_T}}, \tag{2.21}$$

onde $B_t = exp\left(\int_0^t r du\right) = e^{rt}$.

Escrevendo $S_t e^{r(T-t)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{x_T}\right]$ vem que

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] &= S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T/S_t}{B_T/B_t}\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] \\
&= S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}\left[\frac{S_T/S_t}{B_T/B_t}\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^S}\right] \\
&= S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}\right] \\
&= S_t \mathbb{Q}^S(S_T > K) \\
&= S_t P_1.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Isto implica que o preço da European Call da equação (2.19) pode ser escrito em termos de ambas as medidas como

$$C(K) = S_t \mathbb{Q}^S(S_T > K) - K e^{-r\tau}\mathbb{Q}(S_T > K). \tag{2.23}$$

2.6. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

A transformada rápida de Fourier (FFT) foi aplicada por Carr e Madan (1999) para acelerar o cálculo do preço de opções. A transformada discreta de Fourier faz a correspondência de um vetor de pontos $x = (x(1), ..., x(N))$ para outro vetor de pontos $w = (w(1), ..., w(N))$

através da relação

$$w(k) = \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), \qquad \text{para } k = 1, ..., N. \tag{2.24}$$

A computação destas somas independentemente uma da outra exigiria N^2 etapas. A transformada rápida de Fourier calcula essas somas simultaneamente, o que requer $N \log_2 N$ passos.

2.7. Representação de Carr e Madan (1999)

Carr e Madan (1999) apresentam uma formulação do preço da call com base na transformada de Fourier. O método consiste numa modificação do preço da call que incorpora um fator de amortecimento. A transformada de Fourier do preço da call modificado é obtida e invertida. O preço da call é então obtido removendo o fator de amortecimento a partir do preço da call modificado.

Seja $C_T(k)$ o preço de uma opção call Europeia com maturidade em T e preço de exercício K. Define-se por k o logaritmo do respetivo preço de exercício, isto é, $k = \ln K$ e $x_T = \ln S_T$. O preço da call pode ser escrito como

$$\begin{aligned} C_T(k) &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+\right] \\ &= \int_k^{\infty} e^{-rT}\left(e^{x_T} - e^k\right) f_T(x_T)dx_T, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde $f_T(x)$ designa a função de densidade de x, definida sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to-\infty} C_T(k) &= \lim_{k\to-\infty} e^{-rT}\int_k^{\infty}\left(e^{x_T} - e^k\right) f_T(x_T)dx_T \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e_T^x\right] - 0 \\ &= S_t, \end{aligned}$$

que não é zero, $C_T(k)$ não é integrável em L^1 e a sua transformada de Fourier não existirá. Para corrigir este facto, Carr e Madan (1999) definem o preço da call modificado $c_T(k)$ como

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k),$$

que inclui um fator de amortecimento $e^{\alpha k}$ em $C_T(k)$, onde $\alpha > 0$. Uma vez que

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to-\infty} c_T(k) &= \lim_{k\to-\infty} e^{-rT}\int_k^{\infty}\left(e^{\alpha k+x_T}-e^{(\alpha+1)k}\right)f_T(x_T)dx_T\\
&= \lim_{k\to-\infty} e^{-rT}\int_k^{\infty} e^{\alpha k+x_T} f_T(x_T)dx_T - \lim_{k\to-\infty} e^{-rT+(\alpha+1)k}\int_k^{\infty} f_T(x_T)dx_T\\
&= e^{-rT}[0]-0,
\end{aligned}
$$

que é zero, $c_T(k)$ é integrável em L^1 e a transformada de Fourier para $c_T(k)$ pode ser encontrada. A ideia de Carr e Madan (1999) é encontrar primeiro a transformada de Fourier $F_{c_T}(v)$ de $c_T(k)$, inverter a transformada de Fourier para fornecer $c_T(k)$ e remover o fator de amortecimento para recuperar $C_T(k)$. A transformada de Fourier de $c_T(k)$ é, usando a equação (2.25)

$$
\begin{aligned}
F_{c_T}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk} c_T(k)dk\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ivk}e^{\alpha k} C(k)dk\\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\alpha+iv)k}\left[\int_k^{+\infty}\left(e^{x_T}-e^k\right)f_T(x_T)dx_T\right]dk.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Como a área de integração $-\infty < k < +\infty$ e $k < x_T < +\infty$ é equivalente a $-\infty < x < +\infty$ e $-\infty < k < x_T$, então a equação (2.26) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
F_{c_T}(v) &= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x_T)\left[\int_{-\infty}^{x_T}\left(e^{(\alpha+iv)k+x_T}-e^{(\alpha+iv+1)k}\right)dk\right]dx_T\\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty} f_T(x_T)\left[\frac{e^{(\alpha+iv)k+x_T}}{\alpha+iv}-\frac{e^{(\alpha+iv+1)k}}{\alpha+iv+1}\Bigg|_{k=-\infty}^{k=x_T}\right]dx_T\\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x_T)\left[\frac{e^{(\alpha+iv+1)x_T}}{\alpha^2+\alpha-v^2+iv(2\alpha+1)}\right]dx_T\\
&= \frac{e^{-rT}}{\alpha^2+\alpha-v^2+iv(2\alpha+1)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-\alpha i-i+v)ix_T} f_T(x_T)dx_T\\
&= \frac{e^{-rT}\varphi_T(v-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-v^2+iv(2\alpha+1)}.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

A última igualdade é válida porque

$$\varphi_T(u) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{iux}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)dx$$

é a função característica de $x_T = \ln(S_T)$, sob a medida $\mathbb{Q}$.

Lema 2.7.1. *Seja $\alpha > 0$. A transformada de Fourier de $c_T(k)$ existe (isto é, $c_T(k) \in L^1$) se $\mathbb{E}\left[S_T^{\alpha+1}\right] < +\infty$.*

Demonstração. Primeiro nota-se que $\mathbb{E}\left[S_T^{\alpha+1}\right] < \infty$ implica

$$F_{c_T}(0) < \infty, \tag{2.28}$$

uma vez que

$$|F_{c_T}(0)| = \frac{e^{-rT}|\varphi_T(-(\alpha+1)i)|}{\alpha^2+\alpha} = \frac{e^{-rT}\mathbb{E}S_T^{\alpha+1}}{\alpha^2+\alpha},$$

onde a última igualdade segue a partir de

$$|\varphi_T(-(\alpha+1)i)| = \left|\mathbb{E}\left[e^{[-(\alpha+1)i]i\log S_T}\right]\right| = \left|\mathbb{E}\left[e^{(\alpha+1)\log S_T}\right]\right| = \mathbb{E}\left[S_T^{\alpha+1}\right].$$

No entanto, também temos a igualdade

$$F_{c_T}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_T(k)dk,$$

que segue facilmente de (2.26). Combinando isto com (2.28) conclui-se a prova. □

O preço da call é encontrado através da transformada inversa de Fourier do preço da call modificado, isto é:

$$
\begin{aligned}
C_T(k) &= e^{-\alpha k} c_T(k) \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} F_{c_T}(v) dv \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-ivk} F_{c_T}(v) dv + \int_{0}^{+\infty} e^{-ivk} F_{c_T}(v) dv \right] \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{0} (-1) e^{iuk} F_{c_T}(-u) du + \int_{0}^{+\infty} e^{-ivk} F_{c_T}(v) dv \right] \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{0}^{+\infty} \left[e^{ivk} F_{c_T}(-v) + e^{-ivk} F_{c_T}(v) \right] dv \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_{0}^{\infty} Re[e^{-ivk} F_{c_T}(v)] dv \\
&= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_{0}^{+\infty} Re\left[e^{-ivk} \frac{\varphi_T(v-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-v^2+iv(2\alpha+1)} \right] dv.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

A última igualdade é válida, porque enquanto a integranda $e^{-ivk} F_{c_T}(k)$ é um número complexo, o preço da call $C_T(k)$ na equação (2.29) é um número real. Isto implica que podemos ignorar a parte imaginária da integranda e trabalhar apenas com a parte real, no qual é par.

Para o preço da Put $P_T(k)$ consideramos também uma versão modificada $p_T(k) := e^{-\alpha k} P_T(k)$. Aplicando o mesmo raciocínio aplicado ao preço da call, surge que a transformada de Fourier para o preço da put modificado é então dada por

$$
F_{p_T}(v) = \frac{F_{c_T}(v-(-\alpha+1)i)}{\alpha^2-\alpha-v^2+i(-2\alpha+1)v}, \tag{2.30}
$$

desde que o fator de amortecimento seja tal que $-\alpha+1<0$, ou $\alpha>1$. Assim o preço da put é obtido através da transformada inversa de Fourier do preço da put modificada por

$$
\begin{aligned}
P_T(k) &= e^{\alpha k} p_T(k) \\
&= \frac{e^{\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivk} F_{p_T}(v) dv \\
&= \frac{e^{\alpha k}}{\pi} \int_{0}^{+\infty} Re[e^{-ivk} F_{p_T}(v)] dv \\
&= \frac{e^{\alpha k}}{\pi} \int_{0}^{+\infty} Re\left[e^{-ivk} \frac{F_{c_T}(v-(-\alpha+1)i)}{\alpha^2-\alpha-v^2+i(-2\alpha+1)v} \right] dv.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

A seguir apresenta-se o procedimento para a escrita da integração (2.29) como uma aplicação do somatório (2.24).

Usando a regra do trapézio ao integral de (2.29) e definindo $v_j = \eta(j-1)$ com $j = 1, ..., N$, uma aproximação numérica para $C_T(k)$ é

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-iv_j k} F_{c_T}(v_j)\eta, \tag{2.32}$$

em que o intervalo de integração $[0, +\infty]$ foi discretizado no intervalo $[0, \eta(N-1)]$ através de uma grelha com N pontos com distância η, em que $v_{j+1} - v_j = \eta$.

Consideramos que k assume valores numa grelha com N pontos com distância λ, de modo que os valores para k sejam

$$k_u = -b + \lambda(u-1) \quad \text{para } u = 1, ..., N. \tag{2.33}$$

Isto dá-nos os níveis de strike logaritmizados no intervalo $[-b, b]$, onde

$$b = \frac{\lambda}{2}(N-1). \tag{2.34}$$

Substituindo (2.33) em (2.32) surge

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{(-\alpha k_u)}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-iv_j[-b+\lambda(u-1)]} F_{c_T}(v_j)\eta \quad \text{para } u = 1, ..., N. \tag{2.35}$$

Notando que $v_j = \eta(j-1)$, escrevemos

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{(-\alpha k_u)}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\lambda\eta(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} F_{c_T}(v_j)\eta. \tag{2.36}$$

Para aplicar o algoritmo FFT (Fast Fourier Transform), e comparando as equações (2.24) e (2.36) é necessário que

$$\lambda\eta = \frac{2\pi}{N}. \tag{2.37}$$

A expressão anterior dá a relação entre a distância dos pontos em ambas as grelhas de discretização v e k.

Para obter uma integração numérica mais precisa incorpora-se as ponderações da regra de Simpson no somatório, e com a restrição (2.37), podemos escrever o preço da call como

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} F_{c_T}(v_j) \frac{\eta}{3} \left(3 + (-1)^j - \delta_{j-1}\right), \tag{2.38}$$

onde $F_{p_T}(v_j)$ é dada pela equção (2.27) e δ_n é a função delta de Kronecker que á a unidade para $n = 0$ e zero caso contrário. O somatório em (2.38) é uma aplicação exata da FFT. É necessário fazer as escolhas apropriadas para η e α.

Nas opções out-of-the-money, Carr e Madan (1999) derivam uma expressão para a transformada rápida de Fourier baseada no valor temporal da opção,

$$C_T(k_u) \approx \frac{1}{\pi \sinh(\alpha k_u)} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} \gamma_T(v_j) \frac{\varphi}{3} \left(3 + (-1)^j - \delta_{j-1}\right), \tag{2.39}$$

onde

$$\begin{aligned}
\gamma_T(v) &= \frac{\phi_T(v - i\alpha) - \phi_T(v + i\alpha)}{2}, \\
\phi_T(v) &= e^{-rT} \left[\frac{1}{1 + iv} - \frac{e^{rT}}{iv} - \frac{\varphi_T(v - i)}{v^2 - iv} \right].
\end{aligned}$$

Também de forma análoga ao obtido para a call, também se pode aplicar o algaritmo da FFT ao valor de uma put. Assim, podemos escrever o preço da put como

$$P_T(k_u) \approx \frac{e^{\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^{N} e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} e^{ibv_j} F_{p_T}(v_j) \frac{\eta}{3} \left(3 + (-1)^j - \delta_{j-1}\right), \tag{2.40}$$

onde $F_{p_T}(v_j)$ é dada pela equção (2.30) e onde δ_n é a função delta de Kronecker que é a unidade para $n = 0$ e zero caso contrário.

2.8. Quadratura de Gauss-Laguerre

A quadratura de Gauss-Laguerre aproxima integrais num intervalo $[a, b]$ com a função peso $w(x) = e^{-x}$ como sendo a soma dos valores funcionais avaliados em pontos discretos ao longo do domínio de integração e multiplicados por um peso:

$$\int_a^b e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j). \tag{2.41}$$

Os pontos $(x_1, ..., x_n)$ são chamados de nodos, pontos ou abcissas e os pontos $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ são chamados de pesos ou coeficientes.

A quadratura de Gauss-Laguerre é especialmente relevante para fins de avaliação do integral para, entre outros, o modelo de Heston (1993), que será descrito no próximo capítulo, porque é designado para integrais sobre o domínio de integração $]0, +\infty[$. Suponhamos que se aplica a quadratura de Gauss-Laguerre com n pontos. As abcissas $(x_1, ..., x_n)$ são os zeros do polinómio de Laguerre $L_n(x)$ de ordem n definido como

$$\begin{aligned} L_n(x) &= e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\frac{n!}{(n+1-k)!}\binom{n}{k}x^{n+1-k} \end{aligned} \tag{2.42}$$

onde $\binom{n}{k}$ é o coeficiente binomial. A derivada de $L_n(x)$ é avaliada em cada uma das abcissas por

$$L_n'(x_j) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}\frac{n!}{(n-k)!}\binom{n}{k}x_j^{n-k} \qquad \text{para } j = 1, ..., n. \tag{2.43}$$

Definimos cada peso como

$$w_j = \frac{(n!)^2}{x_j\left[L_n'(x_j)\right]^2} \qquad \text{para } j = 1, ..., N.$$

Nota-se que o polinómio de Laguerre na Equação (2.42) tem $N+1$ termos, mas a sua derivada tem N termos, que é o número de termos requeridos para a aproximação em (2.41).

3. Modelos de Volatilidade Estocástica

Em Black e Scholes (1973) propôs-se a utilização do movimento Browniano geométrico para representar a evolução do preço de um dado ativo, no contexto de avaliação de instrumentos financeiros derivados.

Não obstante o movimento Browniano geométrico ser um processo estocástico bastante popular, a assunção de pressupostos de taxa de juro e volatilidade constantes tem sido alvo de fortes críticas. Tal decorre do facto desses pressupostos não apresentarem uma sustentação empírica, em particular a longo prazo.

No que se refere à componente da volatilidade podem ser identificadas na teoria financeira pelo menos duas vertentes distintas relativas à sua modelação:

- os modelos de volatilidade local (abordagem determinística), onde a volatilidade é expressa em função do tempo e da evolução do ativo subjacente. A vantagem deste modelo reside na possibilidade, pelo menos em teoria, de obter um ajustamento exacto a todos os preços ou volatilidades implícitas relevantes;

- os modelos de volatilidade estocástica, que consideram que a volatilidade do ativo subjacente é uma variável aleatória, sendo a sua dinâmica ditada por um processo estocástico com a sua própria volatilidade - a denominada volatilidade da volatilidade - e com reversão para uma média de longo prazo.

Neste capítulo optou-se por explorar a segunda abordagem apresentada onde serão utilizados vários modelos de volatilidade estocástica propostos na literatura. Em particular, serão considerados três tipos de volatilidade estocástica: volatilidade do tipo CIR, a volatilidade que segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU) e a volatilidade com processos de jump.

Definição 3.0.1. *(Volatility Smile). Volatility smiles são padrões de volatilidade implícitos que surgem na avaliação de opções financeiras. Em particular, para um determinado vencimento, opções cujo preço de exercício difere substancialmente do preço do ativo subjacente* *impõem preços mais altos (e, portanto, volatilidades implícitas) do que os sugeridos pelos modelos de avaliação de opções padrão.*

Além disso, os modelos de volatilidade estocástica usam métodos estatísticos como fundamentos para avaliar e prever o comportamento das opções.

3.1. Descrição do Modelo

Consideremos no espaço de probabilidade filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{Q})$ o processo

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \qquad S_0 > 0, \tag{3.1}$$

onde $W_t^{\mathbb{Q}}$ é o movimento Browniano standard, $\{\sigma_t\}_{t\geq 0}$ é a volatilidade estocástica, independente de W, e $\{r_t\}_{t\geq 0}$ é a taxa de juro sem risco. O processo $\{\sigma_t\}_{t\geq 0}$ é adaptado à filtração $\mathcal{F}$ e satisfaz a condição de regularidade $\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\int_0^t \sigma_s^2 ds\right] < \infty$ para todo $t \geq 0$.

Aplicando o lema de Itô para $Y_t = \ln(S_t)$ será possível obter a função densidade de probabilidade de S_T, condicionada a S_t:

$$\begin{aligned}
d\ln S_t &= \frac{\partial Y_t}{\partial t} dt + \frac{\partial Y_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial^2 S_t}[dS_t]^2 \\
&= 0 + \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2}\frac{1}{S_t^2}[dS_t]^2 \\
&= \frac{1}{S_t}(r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t) - \frac{1}{2S_t^2}(r_t S_t dt + \sigma_t S_t dW_t)^2 \\
&= r_t dt + \sigma_t dW_t - \frac{1}{2}\left(r_t^2 (dt)^2 + 2 r_t \sigma_t dt dW_t + \sigma_t^2 (dW_t)^2\right) \\
&= \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) dt + \sigma_t dW_t.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da última igualdade entre 0 e T,

$$\begin{aligned}
\int_0^T d\ln(S_t) &= \int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) dt + \int_0^T \sigma_t dW_t \\
S_T &= S_0 \exp\left(\int_0^T \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2\right) dt + \int_0^T \sigma_t dW_t\right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Definimos uma barreira inferior $L_t := L \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ e uma barreira superior $U_t :=$

$U \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$, onde $L < S_0 < U$. Definimos um depósito $B_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ e denotamos o primeiro tempo de paragem por

$$\tau_{LU} := \inf \{t \geq 0 | S_t \notin (L_t, U_t)\}, \tag{3.3}$$

onde $\inf \emptyset := \infty$. Além disso, $\tau_{LU}^+ := \tau_{LU}$ se $S_{\tau_{LU}} = U_{\tau_{LU}}$ e $\tau_{LU}^- := \tau_{LU}$ se $S_{\tau_{LU}} = L_{\tau_{LU}}$, isto é, se a barreira superior for atingida primeiro, estabelecemos $\tau_{LU}^+ := \tau_{LU}$; Se a barreira inferior for atingida primeiro define-se $\tau_{LU}^- := \tau_{LU}$.

Para uma determinada maturidade T, o objetivo é avaliar derivados que dependem do preço do subjacente $\{S_t\}_{t\geq 0}$ atingir ou não os limites $\{L_t\}_{t\geq 0}$ ou $\{U_t\}_{t\geq 0}$.

Definição 3.1.1. *Consideramos os contratos que consistem num payoff positivo $g(S_T)$, com $\mathbb{E}[g(S_T)] < \infty$, se nenhuma das barreiras $\{L_t\}_{t\geq 0}$, $\{U_t\}_{t\geq 0}$ for atingida até à maturidade T. O preço deste tipo de contratos é dado por*

$$X_{L,U}^{g(S_T)}(S_0) = \frac{1}{B_T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0} \left[\mathbb{1}_{\{\tau_{LU} > T\}} g(S_T) \right], \tag{3.4}$$

onde se denota $\mathbb{E}_{\mathbb{Q},x}[\cdot] := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\cdot | S_0 = x]$.
Um caso especial são os contratos de barreira única, isto é

$$X_{L,\infty}^{g(S_T)}(S_0) = \frac{1}{B_T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0} \left[\mathbb{1}_{\{\tau_{LU}^- > T\}} g(S_T) \right]. \tag{3.5}$$

3.2. Modelo de Cox-Ingersoll-Ross (1985)

O modelo de Cox-Ingersoll-Ross (1985) (CIR) é um modelo de taxa a curto prazo que descreve os movimentos da taxa de juros impulsionados por uma fonte de risco de mercado. A dinâmica é descrita como segue:

$$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t, \tag{3.6}$$

onde, r_t é a taxa de juro a curto prazo sendo k a velocidade de reversão à média, θ a média a longo prazo e σ a processo de volatilidade.

Este modelo tem sido amplamente utilizado para descrever a dinâmica da taxa de juro a curto prazo porque tem algumas características fundamentais, como a parametrização intuitiva, a não-negatividade e as fórmulas de preços. Além disso, este modelo tem em consideração as antecipações, a aversão ao risco, as alternativas de investimento e a preferência sobre o timing do consumo e permite ainda previsões detalhadas sobre como as mudanças numa ampla gama de variáveis subjacentes afetam a estrutura temporal. Além disso, a equação

(3.6) constitui uma das equações do modelo de Heston (1993) com a volatilidade a substituir a taxa de juro a curto prazo.

3.3. Modelo de Heston (1993)

O modelo de Heston foi introduzido em 1993 por Steven Heston para resolver os problemas de volatilidade determinística. Ao contrário do modelo de Black-Scholes, este modelo permite atender à não normalidade do logaritmo dos retornos do ativo subjacente. O modelo de Heston (1993) assume que o processo do preço do subjacente segue a seguinte EDE:

$$dS(t) = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1^{\mathbb{P}}(t), \tag{3.7}$$

onde $\mu \in \mathbb{R}$ e $\left\{W_1^{\mathbb{P}}(u); 0 \leq u \leq t\right\}$ é o movimento Browniano padrão inicializado em zero e definido sob a medida física $\mathbb{P}$.

Se a volatilidade de um dado ativo segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck,

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_2^{\mathbb{P}}(t), \tag{3.8}$$

então pelo lema de Itô mostra-se que a variância segue o processo

$$dv_t = \left[\delta^2 - 2\beta v_t\right] dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_2^{\mathbb{P}}(t). \tag{3.9}$$

Isto pode-se reescrever como o processo square-root

$$dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_2^{\mathbb{P}}(t), \tag{3.10}$$

onde $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[dW_1^{\mathbb{P}} dW_2^{\mathbb{P}}] = \rho dt$ sendo $\rho \in [-1, 1]$ a correlação instantânea entre os dois movimentos Brownianos $W_1^{\mathbb{P}}$ e $W_2^{\mathbb{P}}$.A volatilidade do preço do ativo é dada por $\sqrt{v_t}$, com v_t a seguir um processo de reversão para a média, convergindo para uma variância de longo prazo, b, a uma velocidade de reversão a. A volatilidade da volatilidade é definida por σ. Estes parâmetros verificam a condição de Feller (1951):

$$\frac{2ab}{\sigma} > 1.$$

Esta condição garante que o processo de variância v_t permanece positivo se inicializar-se com uma variância positiva v_0.

Para fins de avaliação precisamos de obter os processos S_t e v_t sob uma medida de probabilidade neutra face ao risco $\mathbb{Q}$. Para tal, isso é feito modificando as EDE's das equações

(3.7) e (3.10) por uma aplicação do Teorema de Girsanov. Assim, sob a medida $\mathbb{Q}$, o modelo de Heston pode ser especificado pelo sistema de equações,

$$dS(t) = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1^{\mathbb{Q}}(t) \tag{3.11}$$
$$dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_2^{\mathbb{Q}}(t) \tag{3.12}$$

onde $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[dW_1^{\mathbb{Q}} dW_2^{\mathbb{Q}}] = \rho dt$ e r representa a taxa de juro sem risco.

A equação (2.23) expressa o preço da call Europeia em termos das probabilidades in-the-oney $P_1 = \mathbb{Q}^S(S_T > K)$ e $P_2 = \mathbb{Q}(S_T > K)$, isto é,

$$C(K) = S_t P_1 - Ke^{-r\tau} P_2. \tag{3.13}$$

Heston (1993) deriva uma fórmula semi-analítica para efetuar o pricing da call Europeia, pelo que se apresentam as expressões para o cálculo das probabilidades P_1 e P_2. Tomando $x = \log(S_t)$ e para $j = 1, 2$,

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-i\phi\log(K)} f_j(\phi; x, v)}{i\phi}\right] d\phi, \tag{3.14}$$

onde $f_j(\phi; x, v)$ representa as funções características dadas por

$$f_j(\phi; x, v) = \exp(C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t), \tag{3.15}$$

onde

$$C_j(\tau, \phi) = ri\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\log\left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j}\right)\right], \tag{3.16}$$

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2}\left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}}\right), \tag{3.17}$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}, \tag{3.18}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}, \tag{3.19}$$

com

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = k\theta, \quad b_1 = k - \rho\sigma, \quad b_2 = k. \tag{3.20}$$

Se estivermos perante um ativo que paga dividendos, então na equação (3.11) substituímos r por $r-q$, onde q representa a dividend yield

$$dS(t) = (r-q)S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_1^{\mathbb{Q}}(t). \tag{3.21}$$

Para o preço da call Europeia com uma dividend yield incluímos o termo $e^{-q\tau}$ à equação (3.13) obtendo-se

$$C(K) = S_t e^{-q\tau} P_1 - K e^{-r\tau} P_2. \tag{3.22}$$

A solução para o parâmetro $C_j(\tau, \phi)$ na equação (3.23) torna-se

$$C_j(\tau,\phi) = (r-q)i\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2}\left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2\log\left(\frac{1-g_j e^{d_j\tau}}{1-g_j}\right)\right], \tag{3.23}$$

Para obter o preço de uma put Europeia, $P(K)$, basta usar a paridade put-call obtendo-se

$$P(K) = C(K) + K e^{-r\tau} - S_t e^{-q\tau}. \tag{3.24}$$

3.4. Modelo de Christoffersen et al. (2009)

Christoffersen et al. (2009) assumem que a volatilidade estocástica é do tipo CIR e com dois fatores de risco permitindo uma estrutura de volatilidade mais rica. Este modelo pode ser introduzido como

$$\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= r_t dt + \sqrt{v_t^{(1)}} dW_t^{(1)} + \sqrt{v_t^{(2)}} dW_t^{(2)}, \qquad S_0 > 0, \\
dv_t^{(1)} &= a_1(b_1 - v_t^{(1)})dt + c_1\sqrt{v_t^{(1)}} d\tilde{\mathrm{W}}_t^{(1)}, \qquad v_0^{(1)} > 0, \\
dv_t^{(2)} &= a_2(b_2 - v_t^{(2)})dt + c_2\sqrt{v_t^{(2)}} d\tilde{\mathrm{W}}_t^{(2)}, \qquad v_0^{(2)} > 0,
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde $\{W_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$, $\{W_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$, $\{\tilde{\mathrm{W}}_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$, $\{\tilde{\mathrm{W}}_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ são movimentos Brownianos. $\{W_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$ tem correlação ρ_1 com $\{\tilde{\mathrm{W}}_t^{(1)}\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$ tem correlação ρ_2 com $\{\tilde{\mathrm{W}}_t^{(2)}\}_{t\geq 0}$. As restantes correlações são assumidas como nulas. Os parâmetros a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 e c_2 são constantes positivas. Usando a independência entre os processos de volatilidade, a função característica do processo do preço do ativo logaritmizado é obtida através da equação (3.9), isto é,

$$
\begin{aligned}
\varphi_T(u, S_0) =& \mathbb{E}\left[e^{iu\ln(S_T)}\right] = \exp\left(iu\ln(S_0) + iu\int_0^T r_t dt\right) \\
& \times \exp\left\{-\frac{v_0^{(1)}}{d_1}\frac{(iu+u^2)\sinh(d_1T/2)}{\cosh(d_1T/2)+\frac{\xi_1}{d_1}\sinh(d_1T/2)}\right\} \\
& \times \exp\left\{-\frac{v_0^{(2)}}{d_2}\frac{(iu+u^2)\sinh(d_2T/2)}{\cosh(d_2T/2)+\frac{\xi_2}{d_2}\sinh(d_2T/2)}\right\} \\
& \times \left(\frac{\exp(a_1T/2)}{\cosh(d_1T/2)+\frac{\xi_1}{d_1}\sinh(d_1T/2)}\right)^{\frac{2a_1b_1}{c_1^2}} \\
& \times \left(\frac{\exp(a_2T/2)}{\cosh(d_2T/2)+\frac{\xi_2}{d_2}\sinh(d_2T/2)}\right)^{\frac{2a_2b_2}{c_2^2}}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

onde $d_j = \sqrt{(a_j - c_j\rho_j iu)^2 + c_j^2(iu+u^2)}$, $\xi_j = a_j - c_j\rho_j ui$, para $j = 1, 2$.

3.5. Modelo de Stein e Stein (1991)

O modelo de Stein e Stein (1991) depende de uma volatilidade estocástica que segue um processo de Ornstein-Uhlenbeck (OU). Este é dado por:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_t}{S_t} &= r_t dt + \sigma_t dW_t, \qquad S_0 > 0, \\
d\sigma_t &= \xi(\sigma_t - x)dt + kd\tilde{\mathrm{W}}_t, \qquad \sigma_0 > 0,
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

onde ξ, x, e k são constantes positivas; $\{\tilde{\mathrm{W}}_t\}_{t\geq 0}$ e $\{W_t\}_{t\geq 0}$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes. A função característica do processo log-asset é dada por

$$\begin{aligned}
\varphi_T(u) &= \mathbb{E}\left[e^{iu\ln(S_T)}\right] \\
&= \exp\Bigg(iu\ln(S_0) + iu\int_0^T r_t dt + L\left((iu+u^2)/2\right)\sigma_0^2/2 \\
&\quad + M\left((iu+u^2)/2\right)\sigma_0 + N\left((iu+u^2)/2\right)\Bigg), \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

onde as funções $L(u)$, $M(u)$ e $N(u)$ são definidas como:

$$A := -\frac{\xi}{k^2}, \quad B := \frac{x\xi}{k^2}, \quad C_u := -\frac{u}{k^2T}, \quad a_u := \sqrt{A^2 - 2C_u}, \quad b_u := -\frac{A}{a_u},$$

$$L(u) := -A - a_u\left(\frac{\sinh(a_u k^2 T) + b_u \cosh(a_u k^2 T)}{\cosh(a_u k^2 T) + b_u \sinh(a_u k^2 T)}\right),$$

$$M(u) := B\left(\frac{b_u \sinh(a_u k^2 T) + b_u^2 cosh(a_u k^2 T) + 1 - b_u^2}{cosh(a_u k^2 T) + b_u \sinh(a_u k^2 T)} - 1\right),$$

$$\begin{aligned}
N(u) :=& \frac{a_u - A}{2a_u^2}\left(a_u^2 - AB^2 - B^2 a_u\right)k^2T + \frac{B^2(A^2 - a_u^2)}{2a_u^3}\left(\frac{(2A + a_u) + (2A - a_u)e^{2a_u k^2 T}}{A + a_u + (a_u - A)e^{2a_u k^2 T}}\right) \\
&+ \frac{2AB^2(a_u^2 - A^2)e^{a_u k^2 T}}{a_u^3\left(A + a_u + (a_u - A)e^{2a_u k^2 T}\right)} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\left(\frac{A}{a_u} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A}{a_u}\right)e^{2a_u k^2 T}\right).
\end{aligned}$$

3.6. Modelo de Barndorff-Nielsen e Shephard (2001)

Saltos no processo de volatilidade tornaram-se factos estilizados. Embora saltos nos retornos não tenham impacto na distribuição dos retornos futuros, saltos na volatilidade são altamente persistentes. Por exemplo, Barndorff-Nielsen e Shephard (2001) assumem que o processo de volatilidade estocástica possui saltos levando assim a um aumento repentino da volatilidade:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sqrt{v_t}dW_t, \qquad S_0 > 0,$$

$$v_t = v_0\exp(-\delta t) + \sum_{s_i \le t} M_i \exp(-\delta(t - s_i)), \qquad v_0 > 0, \qquad (3.29)$$

onde $v_0 > 0$ é a variância inicial, $\delta > 0$ a taxa de decrescimento exponencial, $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ são os tempos de saltos de um processo de Poisson homogêneo no tempo com itensidade $\psi > 0$, e M_i são os tamanhos dos saltos com distribuição $G(y)$, $y > 0$. A função característica é dada por

$$\begin{aligned} \varphi_T(u, S_0) &= \mathbb{E}\left[e^{iu\ln(S_T)}\right] \\ &= \exp\left(iu\ln(S_0) + iu\int_0^T r_t dt\right) \times \exp\Bigg(- \frac{(iu+u^2)v_0}{2\delta}(1-\exp(-\delta T)) \\ &\quad -\psi\int_0^T \left[1 - \hat{g}\left(\frac{iu+u^2}{2\delta}(1-\exp(\delta(T-t)))\right)\right] dt\Bigg), \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde $v_0 > 0$ e $\hat{g}(u) := \int_0^\infty \exp(-uy)dG(y)$ é a transformada de Laplace da distribuição do tamanho do salto $G(y)$, $y > 0$.

4. Avaliação de opções com barreira

Esta seção destina-se à avaliação de contratos do tipo down-and-out sob o modelo de volatilidade estocástica (3.1) com barreira única bem como dupla barreira seguindo a abordagem de Escobar et al. (2013).

4.1. Fourier pricing para derivados com uma barreira

O próximo teorema representa o preço de um contrato do tipo down-and-out sob o modelo de volatilidade estocástica (3.1) para contratos com apenas uma barreira.

Teorema 4.1.1. *(Carr and Lee* (2009)*) No modelo* (3.1)*, consideremos uma barreira inferior* $\{L_t\}_{t\geq 0}$ *com* $L := L_0 < S_0$*,* $\mathbb{E}\left[g(S_T)\right] < \infty$*, e um derivado com payoff* $\mathbb{1}_{\{\tau_- > T\}} g(S_T)$*.*

$$X_{L,\infty}^{g(S_T)}(S_0) = \frac{1}{B_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}} g(S_T)\right] - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},L^2/S0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}} g(S_T)\right]\right).$$

Nota-se que os valores esperados não dependem de todo o caminho $\{S_t\}_{t\geq 0}$*, mas das quantidades integradas* $S_T = S_0\, exp\left(\int_0^T (r_t - \sigma_t^2/2)\, dt + \int_0^T \sigma_t\, dW_t\right)$*, dada pela equação* (3.2)*, e* $L_T = L\, exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$*.*

A seguir são apresentados alguns exemplos para o payoff $g(S_T)$: opções digitais, opções barreira e certificados de bónus.

4.1.1. Digital options

A próxima definição ilustra as especificações contratuais das digital options.

Definição 4.1.1. *O valor de uma digital option no momento* T*, sobre o ativo* S*, com nível de barreira* $L_T := L\exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$*, com preço de exercício* $K_T := K\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$*,* *contract size unitário, $S_T > K_T$, se a barreira não for atingida durante o tempo de vida do contrato é*

$$I_K(S_T; L, T) = \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}. \tag{4.1}$$

Lema 4.1.1. *Consideremos o modelo de volatilidade estocástica* (3.1)*. O preço de uma digital option com maturidade T, com função payoff $g(S_T) = \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}$, $K_T := K\, exp\left(\int_0^T r_t\, dt\right) > L_T$, é dado por*

$$I_K(S_0; L, T) = \frac{1}{B_T}\left[\mathbb{Q}_{S_0}\left(S_T > K_T\right) - \frac{S_0}{L}\mathbb{Q}_{L^2/S_0}(S_T > K_T)\right], \tag{4.2}$$

onde $\mathbb{Q}_x(\,.\,) := \mathbb{Q}(\,.\,|S_0 = x)$,

$$\mathbb{Q}_{S_0}(S_T > K_T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty Re\left[\frac{e^{-iu\, ln(K_T/S_0)}\, \varphi_T(u - i, S_0)}{iu\, \varphi_T(-i, S_0)}\right] du \tag{4.3}$$

e $\varphi_T(u, S_0) = \mathbb{E}\left[e^{iu\, ln(S_T)}\right]$ é a função característica do preço do ativo logaritmizado $ln(S_T)$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.1.1, o preço de uma digital option é dado por

$$\begin{aligned} I_K(S_0; L, T) &= X_{L,\infty}^{\mathbf{1}_{\{S_T > K_T\}}} \\ &= \frac{1}{B_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\right] - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\right]\right) \end{aligned}$$

Dado que $K_T > L_T$ vem,

$$\begin{aligned} I_K(S_0; L, T) &= \frac{1}{B_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\right] - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\right]\right) \\ &= \frac{1}{B_T}\left[\mathbb{Q}_{S_0}\left(S_T > K_T\right) - \frac{S_0}{L}\mathbb{Q}_{L^2/S_0}\left(S_T > K_T\right)\right]. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.1.1. *Consideremos o modelo de volatilidade estocástica* (3.1) *com $\sigma_t = \sigma$ e $r_t = r$. Sob o modelo de Black e Scholes* (1973)*, o preço de uma digital option com maturidade T, com função payoff $g(S_T) = \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}$ e $K_T := K\, exp\left(\int_0^T r\, dt\right) > L_T$, é dado por*

$$I_K(S_0; L, T) = \frac{1}{B_T}\left[N\left(\frac{ln(S_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{S_0}{L}\, N\left(\frac{ln(L^2/(S_0 K)) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]. \tag{4.4}$$

Demonstração. Tendo em conta que $\sigma_t = \sigma$ e $r_t = r$ tem-se:

- $\dfrac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t, \qquad S_0 > 0$
- $S_T = S_t \exp\left[\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma \int_t^T dW_u^{\mathbb{Q}}\right]$

onde $\int_t^T dW_u^{\mathbb{Q}} \sim N^1(0, \sqrt{\tau})$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{S_0}(S_T > K_T) &= \mathbb{Q}\left(S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \int_0^T dW_u^{\mathbb{Q}}\right] > K \exp\left(\int_0^T rdt\right)\right) \\
&= \mathbb{Q}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \int_0^T dW_u^{\mathbb{Q}} > \ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + rT\right) \\
&= \mathbb{Q}\left(\int_0^T dW_u^{\mathbb{Q}} > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) + rT - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma}\right) \\
&= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}
$$

De forma análoga tem-se

$$
\mathbb{Q}_{L^2/S_0}(S_T > L_T) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{L^2}{S_0 K}\right) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right).
$$

Substituindo na equação (4.2) vem

$$
I_K(S_0; L, T) = \frac{1}{B_T}\left[N\left(\frac{ln(S_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{S_0}{L}\, N\left(\frac{ln(L^2/(S_0 K)) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right].
$$

□

4.1.2. Barrier options

A próxima definição ilustra as especificações contratuais das barrier options.

Definição 4.1.2. *O valor de uma down-and-out call (put) option sobre o ativo S, com nível de barreira $L_T := L \exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$, com preço de exercício $K_T := K \exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$, contract size unitário é dado por*

$$DOC_K(S_T; L, T) = [\theta S_T - \theta K_T]^+ \mathbb{1}_{\{\tau_L > T\}} \tag{4.5}$$

onde $\theta = 1$ para uma barrier call ou $\theta = -1$ para uma barrier put.

Lema 4.1.2. *Consideremos o modelo de volatilidade estocástica* (3.1). *O preço de uma down-and-out call, respetivamente put, option com strike $K_T := K \exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$ e maturidade T é*

$$DOC_K(S_0; L, T) = C_K(S_0, T) - \frac{S_0}{L} C_K(L^2/S_0, T), \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} DOP_K(S_0; L, T) &= P_K(S_0, T) - \frac{S_0}{L} P_K(L^2/S_0, T) \\ &= DOC_K(S_0; L, T) + (K - S_0) - \frac{S_0}{L}(K - S_0), \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $P_k(S_0, T) := C_K(S_0, T) - S_0 + K$. Se a função característica $\phi_T(u, S_0)$ do preço do ativo logaritimizado $\ln(S_T)$ *é conhecido, o preço da call option $C_K(S_0, T)$ em $\{S_t\}_{t \geq 0}$ com strike K_T e maturidade T é dada pela equação* (2.29).

Demonstração. Visto que a função payoff de uma down-and-out call é dada por $g(S_T) = max(S_T - K_T, 0)$, pelo Teorema (4.1.1), o seu preço pode ser obtido como

$$\begin{aligned} & DOC_K(S_0; L, T) \\ = \;& X_{L,\infty}^{max(S_T - K_T, 0)}(S_0) \\ = \;& \frac{1}{B_T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(S_T - K_T)^+\right] - \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(S_T - K_T)^+\right] \\ = \;& \frac{1}{B_T}\Bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(S_T - K_T)\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\right] \\ & - \frac{1}{B_T} \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(S_T - K_T)\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\right] \Bigg) \\ = \;& \frac{1}{B_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}(S_T - K_T)\right] - \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}(S_T - K_T)\right] \right) \\ = \;& C_K(S_0, T) - \frac{S_0}{L} C_K\left(\frac{L^2}{S_0}, T\right), \end{aligned} \tag{4.8}$$

dado que $K_T > L_T$.

No que diz respeito à avaliação da put, cuja função payoff é $g(S_T) = max(K_T - S_T, 0)$, pelo Teorema (4.1.1), resulta

$$\begin{aligned}
& DOP_K(S_0; L, T) \\
= \; & X_{L,\infty}^{max(K_T - S_T, 0)}(S_0) \\
= \; & \frac{1}{B_T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(K_T - S_T)^+\right] - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(K_T - S_T)^+\right] \\
= \; & \frac{1}{B_T}\bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(K_T - S_T)\mathbb{1}_{\{K_T > S_T\}}\right] \\
& - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},L^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > L_T\}}(K_T - S_T)\mathbb{1}_{\{K_T > S_T\}}\right]\bigg) \\
= \; & \frac{1}{B_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{K_T > S_T\}}(K_T - S_T)\right] - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},D^2/S_0}\left[\mathbb{1}_{\{K_T > S_T\}}(K_T - S_T)\right]\right) \\
= \; & P_K(S_0, T) - \frac{S_0}{L}P_K\left(\frac{L^2}{S_0}, T\right),
\end{aligned}$$

dado que $K_T > L_T$.

Combinando a última equação com a seguinte relação de paridade put-call

$$C_K(S_0, T) - P_K(S_0, T) = S_0 - K, \tag{4.9}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
DOP_K(S_0; L, T) &= C_K(S_0, T) - S_0 + K - \frac{S_0}{L}\left(C_K\left(\frac{L^2}{S_0}, T\right) - S_0 + K\right) \\
&= DOC_K(S_0; L, T) + (K - S_0) - \frac{S_0}{L}(K - S_0) \\
&= DOC_K(S_0; L, T) + (K - S_0) \times \left[1 - \frac{S_0}{L}\right].
\end{aligned}$$

□

4.1.3. Certificados de Bónus

No momento em que são emitidos, os certificados de bónus têm normalmente um prazo até à maturidade de dois a quatro anos. Estes certificados garantem o recebimento de um pagamento específico (nível bónus), desde que o preço do ativo subjacente não atinga ou caia abaixo de um nível de preço estabelecido durante o prazo do certificado. A próxima definição ilustra assim as especificações contratuais deste tipo de certificado.

Definição 4.1.3. *O valor de um certificado de bónus no momento T com barreira $\{L_t\}_{t\geq 0}$, com nível bónus de $P_T := P\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$ é dado por*

$$BO_P(S_T; L, T) = \begin{cases} max(S_T, P_T), & \tau_- > T \\ S_T, & \textit{caso contrário} \end{cases}. \tag{4.10}$$

Teorema 4.1.2. *Consideremos o modelo de volatilidade estocástica* (3.1)*. O preço de um certificado bónus com nível bónus $P_T := P\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$ e função payoff dada por* (4.10) *na maturidade T é dado por*

$$BO_P(S_0; L, T) = S_0 + DOP_P(S_0; L, T). \tag{4.11}$$

Se a função característica $\varphi_T(u, S_0)$ do preço do ativo logaritmizado $ln(S_T)$ for conhecida, o preço de um certificado bónus $BO_P(S_0; L, T)$ pode ser encontrado através da equação (2.29)*.*

Demonstração. Sob a medida neutra ao risco $\mathbb{Q}$, o preço de um certificado bónus é dado por

$$\begin{aligned} BO_P(S_0; L, T) &= \frac{1}{B_T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_- > T\}} max(S_T, P_T) + \mathbb{1}_{\{\tau_- \leq T\}} S_T\right] \\ &= \frac{1}{B_T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_- > T\}} max(0, P_T - S_T) + S_T\right] \\ &= \frac{1}{B_T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau_- > T\}} max(0, P_T - S_T)\right] + \frac{1}{B_T}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_T\right] \\ &= X_{L,\infty}^{max(0, P_T - S_T)}(S_0) + S_0 \\ &= DOP_P(S_0; L, T) + S_0. \end{aligned}$$

□

4.2. Fourier pricing para derivados com duas barreiras

O próximo teorema representa o preço de um contrato do tipo knock-out sob o modelo de volatilidade estocástica (3.1) para contratos com duas barreiras.

Teorema 4.2.1. *(Carr and Lee* (2009)*) Sob o modelo de volatilidade estocástica* (3.1)*, considere-se um derivado com payoff $\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}} g(S_T)$, onde $\mathbb{E}[g(S_T)] < \infty$. O seu preço* *é dado por*

$$\begin{aligned} & X_{L,U}^{g(S_T)}(S_0) \\ = & \frac{1}{B_T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{L^n}{U^n}\Bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0^{(2n)}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T\in(L_T,U_T)\}}g(S_T)\right] \\ & -\frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0^{(2n-1)}}\left[\mathbb{1}_{\{S_T\in(L_T,U_T)\}}g(S_T)\right]\Bigg), \end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $S_0^{(2n)} = \dfrac{S_0U^{2n}}{L^{2n}}$ *e* $S_0^{(2n-1)} = \dfrac{U^{2n}}{L^{2n-2}S_0}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Nota-se que as espectativas incluídas não dependem de todo o caminho $\{S_t\}_{t\geq 0}$, *mas nas quantidades integradas* $S_T = S_0\exp\left(\int_0^T (r_t - \sigma_t^2/2)dt + \int_0^T \sigma_t dW_t\right)$, $L_T = L\exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$, *e* $U_T = U\exp\left(\int_0^T r_t dt\right)$.

4.2.1. Double digital options

A próxima definição ilustra as especificações contratuais das double digital options.

Definição 4.2.1. *O valor de uma double digital option no momento* T, *de barreiras* $\{L_t\}_{t\geq 0}$ *e* $\{U_t\}_{t\geq 0}$, *com preço de exercício* $K_T := K\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) \in [L_T, U_T]$, *com contract size unitário e* $S_T > K_T$ *é dado por*

$$I_K(S_T; L, U, T) = \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}\mathbb{1}_{\{\tau_{LU} > T\}}. \tag{4.13}$$

Lema 4.2.1. *Consideremos o modelo de volatilidade estocástica* (3.1). *O preço de uma double digital option com barreiras* $\{L_t\}_{t\geq 0}$ *e* $\{U_t\}_{t\geq 0}$, *com preço de exercício* $K_T := K\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) \in [L_T, U_T]$ *e com função payoff dada por* (4.13) *na maturidade* T *é*

$$\begin{aligned} & I_K(S_0; L, U, T) \\ = & \frac{1}{B_T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{L^n}{U^n}\Bigg(\mathbb{Q}_{S_0^{(2n-1)}}\left(S_T \in (K_T, P_T)\right) \\ & -\frac{S_0}{L}\mathbb{Q}_{S_0^{(2n-1)}}\left(S_T \in (K_T, P_T)\right)\Bigg), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde $S_0^{(2n)} = \dfrac{S_0U^{2n}}{L^{2n}}$ e $S_0^{(2n-1)} = \dfrac{U^{2n}}{L^{2n-2}S_0}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Tendo em conta que a função payoff de uma double digital option é dada por

$g(S_T) = \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}$, pelo teorema (4.2.1), o seu preço pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
& I_K(S_0; L, U, T) \\
= \; & X_{L,U}^{\mathbf{1}_{\{S_T > K_T\}}}(S_0) \\
= \; & \frac{1}{B_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L^n}{U^n} \Bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (L_T, U_T)\}} \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}} \right] \\
& - \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n-1)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (L_T, U_T)\}} \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}} \right] \Bigg).
\end{aligned}$$

Dado que $K_T \in (L_T, U_T)$ resulta que

$$\mathbb{1}_{\{S_T \in (L_T, U_T)\}} \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}} = \mathbb{1}_{\{S_T \in (K_T, U_T)\}},$$

surgindo assim

$$\begin{aligned}
& I_K(S_0; L, U, T) \\
= \; & \frac{1}{B_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L^n}{U^n} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n-1)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (K_T, U_T)\}} \right] - \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n-1)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (K_T, U_T)\}} \right] \right) \\
= \; & \frac{1}{B_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L^n}{U^n} \left(\mathbb{Q}_{S_0^{(2n)}} \left(S_T \in (K_T, U_T) \right) - \frac{S_0}{L} \mathbb{Q}_{S_0^{(2n-1)}} \left(S_T \in (K_T, U_T) \right) \right).
\end{aligned}$$

□

4.2.2. Double barrier options

A próxima definição ilustra as especificações contratuais das double barrier optinos.

Definição 4.2.2. *O valor de uma double barrier call option no momento T, de barreiras $\{L_t\}_{t \geq 0}$ e $\{U_t\}_{t \geq 0}$ com preço de exercício $K_T := K \exp\left(\int_0^T r_t dt\right) \in [L_T, U_T]$, com um contract size unitário e $S_T > K_T$ é dado por*

$$EOC_K(S_T; L, U, T) = \max(S_T - K_T, 0) \mathbb{1}_{\{\tau_{LU} > T\}}. \tag{4.15}$$

Lema 4.2.2. *Consideremos o modelo de volatilidade estocástica* (3.1). *O preço de uma double barrier call option com barreiras $\{L_t\}_{t \geq 0}$ e $\{U_t\}_{t \geq 0}$, com preço de exercício $K_T :=$*

$K \exp\left(\int_0^T r_t dt\right) \in [L_T, U_T]$ *e com função payoff dada por* (4.15) *na maturidade* T *é*

$$
\begin{aligned}
& EOC_K(S_0; L, U, T) \\
= & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L^n}{U^n} \left(C_K\left(S_0^{(2n)}, T\right) - C_U\left(S_0^{(2n)}, T\right) + (U-K) I_U\left(S_0^{(2n)}; U, T\right)\right) \\
- & \frac{L^n}{U^n} \frac{S_0}{L} \left(C_K\left(S_0^{(2n-1)}, T\right) - C_U\left(S_0^{(2n-1)}, T\right) + (U-K) I_U\left(S_0^{(2n-1)}; U, T\right)\right)
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

onde $S_0^{(2n)} = \dfrac{S_0 U^{2n}}{L^{2n}}$ *e* $S_0^{(2n-1)} = \dfrac{U^{2n}}{L^{2n-2} S_0}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Tendo em conta que a função payoff de uma double barrier call option é dada por $g(S_T) = \max(S_T - K_T, 0)$, pelo teorema (4.2.1), o seu preço pode ser obtido como

$$
\begin{aligned}
EOC_K(S_0; L, U, T) &= X_{L,U}^{\max(S_T - K_T, 0)} \\
&= \frac{1}{B_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L^n}{U^n} \Bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (L_T, U_T)\}} \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}} (S_T - K_T) \right] \\
&\quad - \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n-1)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (L_T, U_T)\}} \mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}} (S_T - K_T) \right] \Bigg) \\
&= \frac{1}{B_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L^n}{U^n} \Bigg(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (K_T, U_T)\}} (S_T - K_T) \right] \\
&\quad - \frac{S_0}{L} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}, S_0^{(2n-1)}} \left[\mathbb{1}_{\{S_T \in (K_T, U_T)\}} (S_T - K_T) \right] \Bigg)
\end{aligned}
$$

□

5. Representações com time-change

Esta secção descreve uma alternativa à avaliação de opções com dupla barreira através de séries infinitas de convergência rápida. Ao contrário do que acontece com as técnicas de Fourier, esta técnica evita uma integração sobre o plano complexo.

5.1. Fórmulas de avaliação

Esta secção destina-se à avaliação de derivados com dupla barreira através da representação do modelo (3.1) como um movimento Browniano geométrico com time-change.

Para o processo descontado $\tilde{\mathrm{S}} = \{\tilde{\mathrm{S}}_t\}_{t\geq 0} = \left\{\frac{S_t}{B_t}\right\}_{t\geq 0}$, representações como um movimento Browniano com time-change estão disponíveis. As representações com time-change são interessantes do ponto de vista numérico visto que admitem séries infinitas de convergência rápida ao contrário do que acontece com as inversões de Laplace ou de Fourier.

Descrevemos $\tilde{\mathrm{S}}$ como um movimento Browniano geométrico com time-change G_{Λ_t}, isto é

$$\frac{dG_t}{G_t} = dW_t, \qquad G_0 := S_0 > 0, \tag{5.1}$$

e $\Lambda = \{\Lambda_t\}_{t\geq 0}$ é um processo estocástico contínuo e crescente com $\Lambda_0 = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} \Lambda = +\infty$ na medida $\mathbb{Q}$ quase certamente.

Denota-se a transformada de Laplace de Λ_T por $v_T^c(u) := \mathbb{E}[\exp(-u\Lambda_T)]$. A função característica de $\ln(\tilde{\mathrm{S}}_t) = \ln(G_{\Lambda_t})$ é dada por $\varphi_T(u, S_0) = \exp(iu\ln(S_0)) \times v_T^c((iu+u^2)/2)$. O teorema seguinte apresenta as representações com time-change para os modelos da secção 3.

Teorema 5.1.1. *$\tilde{S} = \left\{\frac{S_t}{B_t}\right\}_{t\geq 0}$ pode ser representado como um movimento Browniano geométrico com time-change G_{Λ_t} nos seguintes casos:*

Para os modelos de Heston (1993) *e Christoffersen et al.* (2009) *tem-se $\Lambda_T := \int_0^T \lambda_s ds$ e*

$\lambda_t = v_t$ para todo $t \geq 0$ sendo a transformada de Laplace do processo integrado Λ_T dada por

$$
\begin{aligned}
&v_T^c(u) : \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-u\int_0^T \lambda_s ds\right)\right] \\
&= \left(\frac{\exp(\theta_1 T/2)}{\cosh(\varrho_1 T/2) + \dfrac{\theta_1}{\varrho_1}\sinh(\varrho_1 T/2)}\right)^{\dfrac{2\theta_1\nu_1}{\gamma_1^2}} \left(\frac{\exp(\theta_2 T/2)}{\cosh(\varrho_2 T/2) + \dfrac{\theta_2}{\varrho_2}\sinh(\varrho_2 T/2)}\right)^{\dfrac{2\theta_2\nu_2}{\gamma_2^2}} \\
&\quad\times \exp\left\{-\frac{\lambda_0^{(1)}}{\varrho_1}\frac{u\sinh(\varrho_1 T/2)}{\cosh(\varrho_1 T/2) + \dfrac{\theta_1}{\varrho_1}\sinh(\varrho_1 T/2)} - \frac{\lambda_0^{(2)}}{\varrho_2}\frac{u\sinh(\varrho_2 T/2)}{\cosh(\varrho_2 T/2) + \dfrac{\theta_2}{\varrho_2}\sinh(\varrho_2 T/2)}\right\},
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

onde $\varrho_j = \sqrt{\theta_j^2 + \gamma_j^2 u}$, para $j = 1, 2$. O modelo de Heston (1993) *é obtido definindo $\nu = \nu_1$, $\theta = \theta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\lambda_0 = \lambda_0^{(1)}$, e $\theta_2 = \lambda_0^{(2)} = 0$.*

No modelo de Stein e Stein (1991) *define-se $\Lambda_T := \int_0^T \lambda_s ds$ e σ_t^2 para todo $t \geq 0$. A transformada de Laplace do processo integrado ϱ_T é dada por*

$$
\begin{aligned}
v_T^c(u) :&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-u\int_0^T \lambda_s ds\right)\right] \\
&= \exp(L(u)\lambda_0/2 + M(u)\sqrt{\lambda_0} + N(u)),
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

onde as funções $L(u)$, $M(u)$, e $N(u)$ são definidas na secção (3.4.)*.*

No modelo de Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) *tem-se $\Lambda_T := \int_0^T \lambda_s ds$ e $\lambda_t = v_t$ para todo $t \geq 0$ sendo a transformada de Laplace do processo integrado Λ_T dada por*

$$
\begin{aligned}
v_T^c(u) :&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-u\int_0^T \lambda_s ds\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{u\lambda_0}{\delta}\left(1 - \exp(-\delta T)\right) - \psi\int_0^T \left[1 - \hat{g}\left(\frac{u}{\delta}(1 - \exp(\delta(T - t)))\right)\right] dt\right),
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

onde $v_0 > 0$ e $\hat{g}(u) := \int_0^\infty \exp(-uy)dG(y)$ é a transformada de Laplace da distribuição do tamanho do salto $G(y)$, $y > 0$.

Face ao exposto, os contratos knock-out podem ser avaliados por séries infinitas de convergência rápida. Enquanto que na secção 4 os integrais de Fourier eram calculados por período, o teorema (5.1.2) apresenta séries infinitas que necessitam apenas de uma única avaliação da transformada de Laplace do time-change por período. Assim resulta num cálculo mais rápido e um controle mais fácil do erro de truncagem. O próximo teorema representa o resultado geral da avaliação de contratos do tipo knock-out que pagam $g(S_T)$ na maturidade T se o caminho sobreviver até T.

Teorema 5.1.2. *Consideremos o movimento Browniano geométrico com time-change G_{ϱ_t} com um time change Λ contínuo, independente de G. Define-se a transformada de Laplace de Λ_T por $v_T^c(u) := \mathbb{E}\left[\exp(-u\Lambda_T)\right]$, $u \geq 0$. Consideremos um derivado com payoff $\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}g(S_T)$, onde $\mathbb{E}[g(S_T)] < \infty$. O seu preço no momento T é dado por*

$$X_{L,U}^{g(S_T)}(S_0) = \frac{1}{B_T}\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} v_T^c\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right)Z_n^{g(S_T)}, \tag{5.5}$$

onde $Z_n^{g(S_T)} := \int_b^a e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)g(e^y)dy$*,* $x := \ln(S_0)$*,* $a := \ln(U)$*, e* $b := \ln(L)$*.*

Demonstração. A função densidade de transição descreve a densidade de probabilidade para o processo $\{\ln(S_t)\}_{t\geq 0}$ que começa em $x := \ln(S_0)$, sobrevive até ao momento T, e termina em $y := \ln(S_T)$. Sob o modelo de Black-Scholes (1973), esta densidade é dada por

$$f_{ab}(T,y) = \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)T}e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right)\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right), \tag{5.6}$$

Sob o modelo de Black-Scholes (1973), o preço de um contrato do tipo exit-and-out com payoff $\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}g(S_T)$ no momento T é dada por

$$\begin{aligned}
&BS_{L,U}^{g(S_T)}(S_0) : \\
&= \frac{1}{B_T}\int_b^a f_{ab}(T,y)g(e^y)dy \\
&= \frac{1}{B_T}\int_b^a \left[\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)T}e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right)\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)g(e^y)\right]dy \\
&= \frac{1}{B_T}\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)T}\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right) \\
&\quad\times\left(\int_b^a e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)g(e^y)dy\right).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Se o intervalo $[0,T]$ for transformado continuamente em $[0,\Lambda_T]$, a expressão anterior representa o preço de um contrato exit-and-out condicionado ao time-change $T = \Lambda_T$. Se este time-change tem transformada de Laplace $v_T^c(u) := \mathbb{E}[\exp(-u\Lambda_T)]$, $u \geq 0$, conclui-se que

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{-\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)^T} | T = \Lambda_T\right]\right] = v_T^c\left(\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \tag{5.8}$$

e, substituindo a expressão anterior em (5.7), obtemos o preço dos contratos exit-and-out sob o movimento Browniano geométrico com time-change

$$\begin{aligned} X_{L,U}^{g(S_T)}(S_0) = {} & \frac{1}{B_T}\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} v_T^c\left(\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right) \\ & \times \left(\int_b^a e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)g(e^y)dy\right). \end{aligned}$$

$\square$

O teorema anterior também pode ser usado para avaliar opções com uma barreira. O próximo teorema é uma aplicação do teorema (5.1.2) para avaliação de double digital options.

Teorema 5.1.3. *Consideremos um movimento Browniano geométrico com time-change* G_{Λ_t} *com um time-change contínuo* Λ*, independente de* G*. Definimos a transformada de Laplace de* Λ_T *por* $v_T^c(u) := \mathbb{E}\left[\exp(-u\Lambda_T)\right]$*,* $u \geq 0$*. Sendo o preço de exercício dado por* $K_T := K\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$*, preço de uma double digital option com payoff* $\mathbb{1}_{\{\tau > T, S_T > K_T\}}$ *no momento* T *é dado por*

$$I_K(S_0; L, U, T) = \frac{1}{B_T}\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} v_T^c\left(\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right)Z_n^{g(S_T)}, \tag{5.9}$$

onde

$$Z_n^{g(S_T)} = \frac{e^{-\frac{a}{2}}\frac{n\pi(-1)^{n+1}}{a-b} + e^{-\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi(k-b)}{a-b}\right) + \frac{n\pi}{a-b}\cos\left(\frac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)\right)}{\frac{1}{4} + \frac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}},$$

com $x := \ln(S_0)$*,* $k := \ln(K)$*,* $a := \ln(U)$*, e* $b := \ln(L)$*.*

Demonstração. Tendo em conta a função payoff de uma double digital option, $\mathbb{1}_{\{\tau > T, S_T > K_T\}}$, e o teorema (5.1.2) obtém-se

$$\begin{aligned}
Z_n^{g(S_T)} &= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) g(e^y)dy \\
&= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) \mathbb{1}_{\{\tau>T, S_T>K_T\}}dy \\
&= \int_k^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy.
\end{aligned}$$

O integral anterior pode ser obtido usando o método de integração por partes duas vezes:

$$\begin{aligned}
&\int_k^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy \\
&= \left[-e^{-\frac{y}{2}}\frac{a-b}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a - \frac{1}{2}\frac{a-b}{n\pi}\int_k^a e^{-\frac{y}{2}}\cos\left(\frac{ny(y-b)}{a-b}\right)dy \\
&= \left[-e^{-\frac{y}{2}}\frac{a-b}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a - \\
&\quad \frac{1}{2}\frac{a-b}{n\pi}\left\{\left[e^{-\frac{y}{2}}\frac{a-b}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a + \quad \frac{1}{2}\frac{a-b}{n\pi}\int_k^a e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)dy\right\} \\
&= \left[-e^{-\frac{y}{2}}\frac{a-b}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\frac{(a-b)^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a \\
&\quad - \frac{1}{4}\frac{(a-b)^2}{n^2\pi^2}\int_k^a e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)dy.
\end{aligned}$$

Da igualdade anterior resulta que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{4n^2\pi^2+(a-b)^2}{4n^2\pi^2}\right)\int_k^a e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)dy = \\
&= \left[-e^{-\frac{y}{2}}\frac{a-b}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\frac{(a-b)^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a,
\end{aligned}$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_k^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy = \\
&= \left[\frac{4n^2\pi^2}{4n^2\pi^2+(a-b)^2}\left(-e^{-\frac{y}{2}}\frac{a-b}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\frac{(a-b)^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right)\right]_k^a \\
&= \left[-\frac{2(a-b)^2}{4n^2\pi^2+(a-b)^2}e^{-\frac{y}{2}}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \frac{4n\pi(a-b)}{4n^2\pi^2+(a-b)^2}e^{-\frac{y}{2}}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a \\
&= \left[\frac{e^{-\frac{y}{2}}(a-b)}{4n^2\pi^2+(a-b)^2}\left(-2(a-b)\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - 4n\pi\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right)\right]_k^a \\
&= \left[\frac{4e^{-\frac{y}{2}}(a-b)^2}{4n^2\pi^2+(a-b)^2}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \frac{n\pi}{a-b}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right)\right]_k^a \\
&= \left[\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\frac{1}{4}+\frac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \frac{n\pi}{a-b}\cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right)\right]_k^a \\
&= \frac{e^{-\frac{a}{2}}}{\frac{1}{4}+\frac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi(a-b)}{a-b}\right) - \frac{n\pi}{a-b}\cos\left(\frac{n\pi(a-b)}{a-b}\right)\right) \\
&\quad - \frac{e^{-\frac{k}{2}}}{\frac{1}{4}+\frac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}}\left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi(k-b)}{a-b}\right) - \frac{n\pi}{a-b}\cos\left(\frac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)\right) \\
&= \frac{e^{-\frac{a}{2}}\frac{n\pi(-1)^{n+1}}{a-b} + e^{-\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\sin\left(\frac{n\pi(k-b)}{a-b}\right) + \frac{n\pi}{a-b}cos\left(\frac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)\right)}{\frac{1}{4}+\frac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}}
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão anterior na equação (5.5) obtém-se o resultado pretendido. □

Teorema 5.1.4. *Consideremos o movimento Browniano geométrico com time-change* G_{Λ_t} *com um time-change contínuo* Λ*, independente de* G*. Definimos a transformada de Laplace de* Λ_T *por* $v_T^c(u) := \mathbb{E}\left[\exp(-u\Lambda_T)\right]$*,* $u \geq 0$*. Sendo o preço de exercício dado por* $K_T := K\exp\left(\int_0^T r_t dt\right) > L_T$*, preço de uma double barrier option com payoff* $\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}(S_T - K_T)^+$ *no momento* T *é dado por*

$$EOC_K(S_0; L, U, T) = \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=1}^{+\infty} v_T^c\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right) Z_n^{g(S_T)}, \tag{5.10}$$

onde

$$Z_n^{g(S_T)} = \frac{\dfrac{2n\pi}{a-b}(-1)^{n+1}\sinh\left(\dfrac{a-k}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)}{e^{-\frac{k}{2}}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}\right)},$$

$$x := \ln(S_0), k := \ln(K), a := \ln(U), b := \ln(L).$$

Demonstração. Tendo em conta a função payoff de uma double barrier option, $\mathbb{1}_{\{\tau>T\}}(S_T - K_T)^+$, e o teorema (5.1.2) obtém-se

$$\begin{aligned}
Z_n^{g(S_T)} &= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) g(e^y)dy \\
&= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) \mathbb{1}_{\{\tau>T\}}(e^y - e^k)^+ dy \\
&= \int_k^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) (e^y - e^k)dy \\
&= \int_k^a \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy.
\end{aligned}$$

Utilizando o método de integração por partes duas vezes obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_k^a \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy = \\
&= \left[-\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a \\
&\quad + \int_k^a \frac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy \\
&= \left[-\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a \\
&\quad + \frac{a-b}{2n\pi} \int_k^a \left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right) \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy \\
&= \left[-\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a \\
&\quad + \frac{a-b}{2n\pi} \left\{\left[\left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a\right. \\
&\quad - \int_k^a \frac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy\} \\
&= \left[-\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) + \left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{(a-b)^2}{2n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right]_k^a \\
&\quad - \frac{(a-b)^2}{4n^2\pi^2} \int_k^a \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy
\end{aligned}
$$

Da igualdade anterior resulta

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{(a-b)^2}{4n^2\pi^2}\right) \int_k^a \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy = \\
&= \left[\left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{(a-b)^2}{2n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\right. \\
&\quad - \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \frac{a-b}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)\Bigg)_k^a,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&\int_k^a \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) dy \\
&= \left[\frac{\left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right) \dfrac{(a-b)^2}{2n^2\pi^2} \sin\left(\dfrac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right) \dfrac{a-b}{n\pi} \cos\left(\dfrac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)}{\left(1 + \dfrac{(a-b)^2}{4n^2\pi^2}\right)}\right]_k^a \\
&= \left[\frac{\dfrac{\left(e^{\frac{y}{2}} + e^{k-\frac{y}{2}}\right)}{2} \sin\left(\dfrac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) - \dfrac{n\pi\left(e^{\frac{y}{2}} - e^{k-\frac{y}{2}}\right)}{a-b} \cos\left(\dfrac{n\pi(y-b)}{a-b}\right)}{\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}\right)}\right]_k^a \\
&= \frac{\dfrac{\left(e^{\frac{a}{2}} + e^{k-\frac{a}{2}}\right)}{2} \sin\left(\dfrac{n\pi(a-b)}{a-b}\right) - \dfrac{n\pi\left(e^{\frac{a}{2}} - e^{k-\frac{a}{2}}\right)}{a-b} \cos\left(\dfrac{n\pi(a-b)}{a-b}\right)}{\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}\right)} \\
&\quad - \frac{\dfrac{\left(e^{\frac{k}{2}} + e^{k-\frac{k}{2}}\right)}{2} \sin\left(\dfrac{n\pi(k-b)}{a-b}\right) - \dfrac{n\pi\left(e^{\frac{k}{2}} - e^{k-\frac{k}{2}}\right)}{a-b} \cos\left(\dfrac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)}{\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{n\pi(-1)^{n+1}\left(e^{\frac{a}{2}} - e^{k-\frac{a}{2}}\right)}{a-b} - e^{\frac{k}{2}} \sin\left(\dfrac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}} \\
&= \frac{\dfrac{n\pi(-1)^{n+1}}{a-b}\left(e^{\frac{a-k}{2}} - e^{\frac{k-a}{2}}\right) - \sin\left(\dfrac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)}{e^{-\frac{k}{2}}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{2n\pi(-1)^{n+1}}{a-b} \sinh\left(\dfrac{a-k}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{n\pi(k-b)}{a-b}\right)}{e^{-\frac{k}{2}}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{n^2\pi^2}{(a-b)^2}\right)}.
\end{aligned}
$$

Substituindo a expressão anterior na equação (5.5) obtém-se o resultado pretendido. □

Teorema 5.1.5. *Os preços dos contratos down-and-out nos teoremas* (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) *convergem para a expressão do preço dos contratos de uma barreira apresentada no teorema*

(4.1.1), *isto é,*

$$X_{L,\infty}^{g(S_T)}(S_0) = \frac{1}{B_T}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q},S_0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T>L_T\}}g(S_T)\right] - \frac{S_0}{L}\mathbb{E}_{\mathbb{Q},L^2/S0}\left[\mathbb{1}_{\{S_T>L_T\}}g(S_T)\right]\right).$$

Demonstração. □

5.2. Limitações do erro

Para implementar as fórmulas de avaliação nos teoremas (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4), as séries infinitas necessitam de ser aproximadas por séries finitas. O lema seguinte apresenta limites ao erro caso a transformada de Laplace do time-change seja limitada exponencialmente, isto é, $v_T(u) \leq J\exp(-Mu)$, onde J, M são constantes positivas, e caso a transformada de Laplace seja limitada por $J^*\exp(-M^*\sqrt{u})$, onde J^*, M^* são também constantes positivas.

Lema 5.2.1. *Consideremos um movimento Browniano geométrico com time-change* $\{G_{\Lambda_t}\}_{t\geq 0}$ *com um time-change contínuo* Λ*, independente de* G*.Definimos* $a := \ln(U)$*,* $b := \ln(L)$*, e* $x := \ln(S_0)$ *e a transformada de Laplace de* Λ_T *por* $v_T^c(u) := \mathbb{E}[\exp(-u\Lambda_T)]$*,* $u \geq 0$*. Assumimos que a função payoff condicionada* $g(e^y)$ *é limitada por* $y \in [a,b]$*. Definimos*

$$K^* := \int_b^a e^{-\frac{y}{2}}|g(e^y)|dy.$$

Se a série infinita no teorema (5.1.2) *for truncada após* N *somas, o erro absoluto de computação do preço da opção é definido como*

$$\epsilon := \left|\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b}\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_T^c\left(\frac{1}{8}+\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right)Z_n^{g(S_T)}\right|. \tag{5.11}$$

Para uma dada precisão $\epsilon > 0$*, é necessário um limite inferior para o índice do somatório* $N \in \mathbb{N}$*.*

- *Se a transformada de Laplace do time-change for limitada exponencialmente, isto é, se* $v_T(u) \leq J\exp(-Mu)$*, onde* J*,* M *são constantes positivas, obtém-se*

$$N > \sqrt{\left|\frac{2(a-b)^2}{\pi^2 M}\ln\left(\frac{B_T M\pi^2\epsilon}{2K^* e^{\frac{x}{2}}(a-b)J}\right)\right|}. \tag{5.12}$$

- *Se $v_T(u) \leq J^* \exp(-M^*\sqrt{u})$, onde J^*, $M^* > 0$ são constantes positivas, então*

$$N > -\frac{\sqrt{2}(a-b)}{\pi M^*} \ln\left(\frac{B_T M^* \pi \epsilon}{2\sqrt{2} K^* e^{\frac{x}{2}} J^*}\right). \tag{5.13}$$

Demonstração. Notamos que

$$\begin{aligned}
|Z_n^{g(S_T)}| &= \left| \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) g(e^y) dy \right| \\
&\leq \int_b^a \left| e^{-\frac{y}{2}} \sin\left(\frac{n\pi(y-b)}{a-b}\right) g(e^y) \right| dy \\
&\leq \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} |g(e^y)| dy \\
&= K^* < \infty.
\end{aligned}$$

Se $v_T(u) \leq J \exp(-Mu)$, onde J, M são constantes positivas, obtemos da equação 5.11

$$\begin{aligned}
\epsilon :&= \left| \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b} \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_T^c \left(\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right) Z_n^{g(S_T)} \right| \\
&\leq \frac{1}{B_T} \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b} K^* \sum_{n=N+1}^{+\infty} n v_T^c \left(\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{B_T} \frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}}{a-b} \int_N^{+\infty} nJ \exp\left(-M \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) dn \\
&= \frac{1}{B_T} \frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}}{a-b} J \left[-\frac{(a-b)^2}{M\pi^2} \exp\left(-M \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \right]_N^{+\infty} \\
&= \frac{1}{B_T} \frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}}{a-b} J \frac{(a-b)^2}{M\pi^2} \exp\left(-M \frac{N^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \\
&= \frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}(a-b)}{B_T M \pi^2} J \exp\left(-M \frac{N^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right).
\end{aligned}$$

A partir da desigualdade anterior obtemos um limite inferior para o índice do somatório N:

$$N > \sqrt{\left| \frac{2(a-b)^2}{\pi^2 M} \ln\left(\frac{B_T M \pi^2 \epsilon}{2K^* e^{\frac{x}{2}} (a-b) J}\right) \right|}. \tag{5.14}$$

Se $v_T(u) \leq J^* \exp(-M^*\sqrt{u})$, onde J^*, $M^* > 0$ são constantes positivas, então

$$
\begin{aligned}
\epsilon :&= \left| \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b} \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_T^c \left(\frac{1}{8} + \frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi(x-b)}{a-b}\right) Z_n^{g(S_T)} \right| \\
&\leq \frac{1}{B_T}\frac{2e^{\frac{x}{2}}}{a-b} K^* \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_T^c \left(\frac{n^2\pi^2}{2(a-b)^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{B_T}\frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}}{a-b} \int_N^{+\infty} J^* \exp\left(-M^* \frac{n\pi}{\sqrt{2}(a-b)}\right) dn \\
&= \frac{1}{B_T}\frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}}{a-b} J^* \left[-\frac{\sqrt{2}(a-b)}{M^*\pi} \exp\left(-M^* \frac{n\pi}{\sqrt{2}(a-b)}\right)\right]_N^{+\infty} \\
&= \frac{1}{B_T}\frac{2K^* e^{\frac{x}{2}}}{a-b} \frac{\sqrt{2}(a-b)}{M^*\pi} J^* \exp\left(-M^* \frac{N\pi}{\sqrt{2}(a-b)}\right).
\end{aligned}
$$

Assim um limite inferior para o índice do somatório N pode ser dado por

$$
N > -\frac{\sqrt{2}(a-b)}{\pi M^*} \ln\left(\frac{B_T M^* \pi \epsilon}{2\sqrt{2} K^* e^{\frac{x}{2}} J^*}\right). \tag{5.15}
$$

Para uma double digital option com payoff dado pela equação (4.13) o valor de K^* é

$$
\begin{aligned}
K^* &= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} |g(e^y)| dy \\
&= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} |\mathbb{1}_{\{S_T > K_T\}}| dy \\
&= \int_{\ln(K)}^{\ln(U)} e^{-\frac{y}{2}} dy \\
&= \left[-2e^{-\frac{y}{2}}\right]_{\ln(K)}^{\ln(U)} \\
&= -2U^{-\frac{1}{2}} + 2K^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{K}} - \frac{2}{\sqrt{U}}.
\end{aligned}
$$

Para uma double barrier option com payoff dado pela equação (4.15) o valor de K^* é

$$\begin{aligned}
K^* &= \int_b^a e^{-\frac{y}{2}} |(e^y - K)\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}| dy \\
&= \int_{\ln(K)}^{\ln(U)} e^{-\frac{y}{2}} (e^y - K) dy \\
&= \int_{\ln(K)}^{\ln(U)} (e^{\frac{y}{2}} - K e^{-\frac{y}{2}}) dy \\
&= \left[2e^{\frac{y}{2}} + 2Ke^{-\frac{y}{2}} \right]_{\ln(K)}^{\ln(U)} \\
&= 2U^{\frac{1}{2}} + 2KU^{-\frac{1}{2}} - 2K^{\frac{1}{2}} - 2KK^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2\sqrt{U} + \frac{2K}{\sqrt{U}} - 4\sqrt{K}.
\end{aligned}$$

□

6. Resultados Numéricos

Neste capítulo serão comparados os resultados obtidos para a avaliação de digital options e barrier options utilizando diferentes métodos de integração. Para tal, serão utilizados Gauss-Laguerre, a regra de Simpson, a regra do trapézio e a Transformada Rápida de Fourier. Na secção 6.3. avaliamos opções com duas barreiras utilizando as séries infinitas de convergência rápida seguindo a abordagem de Escobar et al (2013). Para obter todos os resultados utilizou-se o programa Matlab R2015a. Para os resultados obtidos considerou-se apenas o modelo de Heston (1993) visto que para o modelo de Stein e Stein (1991) não se obtiveram resultados muito favoráveis.

6.1. Valor de uma call/put europeia

Para obter o valor de uma call europeia teve-se em conta a representação de Carr e Madan (1999) dada pela equação (2.29) e a formulação de Heston dada pela equação (3.22), duas formas de obter o valor da opção mencionada. Para obter o valor de uma put europeia também teve-se em conta a representação de Carr e Madan (1999) dada pela equação (2.31) e a formulação de Heston dada pela equação (3.24), duas formas de obter o valor da opção mencionada. Para efeitos de teste são utilizados valores de calls e puts europeias com uma maturidade dentro de 1 ano quando o spot é 50 e com uma taxa de juro sem risco $r = 0.03$ e uma dividend yield $q = 0.02$.

Os parâmetros utilizados para o modelo de Heston encontram-se na seguinte tabela.

Parâmetros do modelo	
Variância inicial(v_0)	0.05
Velocidade de reversão para a média(k)	0.2
Média de longo prazo da variância instantânea(θ)	0.05
Volatilidade do processo variância(σ)	0.3
Correlação(ρ)	-0.7

Tabela 6.1.: Parâmetros do modelo de Heston

Nas tabelas 6.2 e 6.3 serão apresentados os valores obtidos, ,respetivamente, para uma call e put europeia para diferentes preços de exercício bem como o erro absoluto médio obtido para cada método. Para os valores de referência usou-se a quadratura de Gauss Laguerre com 32 pontos.

Método	K=44	K=47	K=50	K=53	K=57	Erro
Valor Referência	6.9278	5.0545	3.3574	1.9554	0.9717	
Gauss Laguerre - 15 pontos	6.9281	5.0546	3.3569	1.9557	0.9719	0.000294
Representação Carr e Madan	6.9281	5.0544	3.3569	1.9554	0.9718	0.000227
FFT - Trapézio	6.9283	5.0545	3.3570	1.9556	0.9719	0.000259
FFT - Simpson	6.9283	5.0545	3.3570	1.9556	0.9719	0.000259

Tabela 6.2.: Valor de uma call europeia com $S = 50$ e $T = 1$.

Método	K=44	K=47	K=50	K=53	K=57	Erro
Valor Referência	2.1587	3.0604	4.3182	6.0628	8.4296	
Gauss Laguerre - 15 pontos	2.1590	3.0605	4.3177	6.0630	8.4298	0.000294
Representação Carr e Madan	2.1274	3.0265	4.2818	6.0245	8.3891	0.036074
FFT - Trapézio	2.1591	3.0604	4.3178	6.0629	8.4299	0.000259
FFT - Simpson	2.1591	3.0604	4.3178	6.0629	8.4299	0.000259

Tabela 6.3.: Valor de uma put europeia com $S = 50$ e $T = 1$.

6.2. Valor de uma opção com barreira

O valor de uma down-and-out call é obtido através do valor de uma call europeia como mostra a equação (4.6). Para efeitos de teste são utilizados valores de uma down-and-out call para uma maturidade dentro de 1 mês quando o spot é 50 e com uma taxa de juro sem risco $r = 0.03$ e uma dividend yield $q = 0.02$. Os parâmetros usados para o modelo de Heston são os mesmos aos utilizados para o valor de uma call/put europeia mencionados na tabela 6.1.

Nas tabelas 6.4 e 6.5 são apresentados os resultados obtidos para uma down-and-out call com barreiras de L=40 e L=44, respetivamente, para diferentes preços de exercício e com e erro absoluto médio para cada método de integração. Para os valores de referência utilizou-se a quadratura de Gauss Laguerre com 32 pontos.

Método	K=44	K=47	K=50	K=53	K=57	Erro
Valor Referência	5.8643	3.2860	1.2336	0.2103	0.0201	
Gaus Laguerre - 15 pontos	5.8652	3.2884	1.2242	0.2291	-0.0138	0.0131
Carr e Madan - Gauss Laguerre	5.8652	3.2860	1.2296	0.2181	0.0107	0.0044
FFT - Simpson	5.8652	3.2859	1.2299	0.2178	0.0109	0.0043

Tabela 6.4.: Valor de uma down-and-out call para uma barreira $L = 40$.

Método	K=44	K=47	K=50	K=53	K=57	Erro
Valor Referência	5.8583	3.2879	1.2314	0.2125	0.0130	
Gaus Laguerre - 15 pontos	5.8621	3.2819	1.2339	0.2135	0.0162	0.0033
Carr e Madan - Gauss Laguerre	5.8577	3.2862	1.2295	0.2180	0.0109	0.0024
FFT - Simpson	5.8556	3.2858	1.2299	0.2178	0.0109	0.0027

Tabela 6.5.: Valor de uma down-and-out call para uma barreira $L = 44$.

Para determinar o valor de uma down-and-out put aplicou-se a paridade put-call tal como mencionado na equação (4.7). Os parâmetros utilizados para a down-and-out put são os mesmos aos utilizados para a down-and-out call. As tabelas 6.6 e 6.7 apresentam os resultados para a down-and-out put com barreiras de, respetivamente, $L = 40$ e $L = 44$ para diferentes preços de exercícios. Para o erro absoluto médio teve-se em conta um valor de referência calculado usando a quadratura de Guass Laguerre com 32 pontos.

Método	K=44	K=47	K=50	K=53	K=57	Erro
Valor Referência	7.3404	4.0472	1.2336	-0.6003	-1.6537	
Gauss Laguerre - 15 pontos	7.3413	4.0497	1.2242	-0.5815	-1.6876	0.0131
Carr Madan - Guass Laguerre	7.3413	4.0473	1.2296	-0.5925	-1.6631	0.0044
FFT - Sipmson	7.3413	4.0471	1.2299	-0.5928	-1.6628	0.0043

Tabela 6.6.: Valor de uma down-and-out put para uma barreira $L = 40$.

Método	K=44	K=47	K=50	K=53	K=57	Erro
Valor Referência	6.6634	3.7032	1.2314	-0.2296	-0.8999	
Gauss Laguerre - 15 pontos	6.6672	3.6971	1.2339	-0.2287	-0.8968	0.0033
Carr Madan - Guass Laguerre	6.6628	3.7014	1.2295	-0.2241	-0.9021	0.0024
FFT - Simpson	6.6607	3.7010	1.2299	-0.2244	-0.9020	0.0027

Tabela 6.7.: Valor de uma down-and-out put para uma barreira $L = 44$.

6.3. Avaliação de opções utilizando representações com time change

Nesta secção obtiveram-se alguns resultados para a avaliação de opções com duas barreiras utilizando séries infinitas de convergência rápida.

Para se obter valores para uma digital option e para uma opção com uma barreira, aplicando as representações com time-change, basta definir a barreira superior como sendo $U = exp(10\sigma\sqrt{T})$ nas fórmulas de avaliação dadas, respetivamente, pelos teoremas 5.1.3 e 5.1.4, um valor que garante que a probabilidade de atingir a barreira superior seja insignificante.

Para efeitos de teste são utilizados, tanto para uma digital option como para uma opção com uma barreira, uma maturidade de 1 ano com um preço spot de 1 e com uma taxa de juro sem risco de $r = 0.1$. Para implementar as fórmulas de avaliação nos teoremas 5.1.3 e 5.1.4, as séries infinitas precisam de ser aproximadas por séries finitas. Assim, $N = 90$ termos na representação em série são suficientes para obter uma precisão alta.

Os parâmetros utilizados para o modelo de Heston encontram-se na seguinte tabela.

Parâmetros do modelo	
Variância inicial(v_0)	0.168
Velocidade de reversão para a média(k)	0.005
Média de longo prazo da variância instantânea(θ)	0.0441
Volatilidade do processo variância(σ)	0.1
Correlação(ρ)	0

Tabela 6.8.: Parâmetros do modelo de Heston

A tabela (6.9) apresenta os resultados para diferentes níveis de barreira considerando, em cada caso, o preço de exercício, K igual ao valor da barreira, L. A coluna do meio e a coluna da direita correspondem, respetivamente, a uma digital option e a uma barrier option.

Barreira	digital option	barrier option
$L = 0.6$	0.9034	0.4000
$L = 0.7$	0.8845	0.3000
$L = 0.8$	0.7730	0.1999
$L = 0.9$	0.4594	0.0100

Tabela 6.9.: Valor de uma digital option e de uma barrier option com S=1 e K=L

Para se obter valores para uma double digital option e para uma double barrier option, aplicando as representações com time-change, foram utilizadas as fórmulas de avaliação dadas, respetivamente, pelos teoremas 5.1.3 e 5.1.4.

Para efeitos de teste são utilizados, tanto para uma double digital option como para uma double barrier option, uma maturidade de 1 com um preço spot de 1 e com uma taxa de juro sem risco de $r = 0.1$. Para implementar as fórmulas de avaliação nos teoremas 5.1.3 e 5.1.4, as séries infinitas precisam de ser aproximadas por séries finitas. Uma vez que a barreira superior agora não precisa de ser definida para infinito, $N = 20$ termos na representação em série são suficientes para obter uma precisão alta. Os parâmetros utilizados para o modelo de Heston encontram-se na tabela 6.8

A tabela (6.10) apresenta os resultados para diferentes níveis de barreiras considerando, em cada caso, o preço de exercício, K igual ao valor da barreira inferior, L. A coluna do meio e a coluna da direita correspondem, respetivamente, a uma double digital option e a uma double barrier option.

Barreira inferior	double digital option	double barrier option
$L = 0.6$	0.90259575	0.39900903
$L = 0.7$	0.87023274	0.28852677
$L = 0.8$	0.66758171	0.14755838
$L = 0.9$	0.12154389	0.01343268

Tabela 6.10.: Valor de uma double digital option e de uma double barrier option com S=1, K=L e barreira superior $U = S^2/L$

Consegue-se notar que ao ser utilizado o método da representação com time-change na avaliação de opções com barriera este será mais rápido do que o uso da FFT, principalmente pelo facto de que a transformada de Laplace do time-change é avaliada apenas $N = 20$ vezes, enquanto que para a técnica FFT requer milhares de avaliações da função característica utilizando as fórmulas de avaliação nos lemas (4.2.1) e (4.2.2).

7. Conclusões

Nesta tese, foi apresentado alguns modelos de volatilidade estocástica para fazer face às exigências do mercado de uma necessidade de considerar as variações de volatilidade.

Neste trabalho foram avaliados vários tipos de opções barreira, com uma e duas barreiras utilizando a representação de Carr e Madan(1999) e a formulação de Heston(1993). Para as opções com dupla barreira utilizou-se uma alternativa de avaliação através de séries de convergência rápida.

Relativamente às experiências numéricas utilizaram-se alguns métodos de integração comparando-os com a técnica da transformada rápida de Fourier para call/put europeias e opções com uma barreira. Também obtiveram-se resultados para double digital options e double barrier otions através das séries infinitas de convergência rápida que se acaba por perceber que são mais rápidas do que a implementação da FFT.

A. European Call usando a FFT

A seguir apresenta-se o método discutido em 2.7 para a avaliação de uma European Call usando a FFT.

```
function [CallFFT, K, lambdainc, eta] = HestonCallFFT(N,LimitSup,S0,r,q,T,kappa,theta,
                                        lambda,rho,sigma,v0,alpha,regra)

%Call price sob o modelo de Heston usando a FFT incorporando a regra de
%Simpson e a do trapézio

%N = número de pontos de discretização
%LimitSup = Limite superior da integração
%S0 = Preço Spot
%r = taxa sem risco
%q = dividend yield
%T = maturidade
%sigma = volatilidade
%alpha = fator de amortecimento

%CallFFT = preço da call usando a FFT
%K = Strikes
%lambdainc = incremento do intervalo dos strikes logaritmizados
%eta = incremento do invervalo de integração

%logaritmo do preço spot
s0 = log(S0);

%Especificar os incrementos
```

```
eta = LimitSup/N;
lambdainc = 2*pi/N/eta;

%Inicializar e especificar os pesos da regra de Simpson e trapézio
w=ones(N,1);
if strcmp(regra,'T')            % Regra do trapézio
    w(1) = 1/2;
    w(N) = 1/2;
elseif strcmp(regra,'S')        % Regra de Simpson
    w(1)=1/3;
    w(N)=1/3;
    for k=2:N-1
    if mod(k,2)==0
        w(k)=4/3;
    else
        w(k)=2/3;
    end
    end
end

%Especificar o parâmetro b
b = N*lambdainc/2;

%Criar o intervalo da integração
v = eta.*[0:N-1]';

%Criar o intervalo para os strikes logaritmizados
k = -b+lambdainc.*[0:N-1]' + s0;

%Criar os strikes
K=exp(k);

%Inicializar o vetor price
CallFFT = zeros(N,1);

%Implementação da FFT
```

```
for u=1:N
    for j=1:N
        psi(j) = HestonCF(v(j)-(alpha+1)*i,kappa,theta,lambda,rho,sigma,T,S0,r,q,v0);
        phi(j) = exp(-r*T)*psi(j)/(alpha^2 + alpha - v(j)^2 +
        i*v(j)*(2*alpha+1));
        x(j) = exp(i*(b-s0)*v(j))*phi(j)*w(j);
        e(j) = exp(-i*2*pi/N*(j-1)*(u-1))*x(j);
    end
    CallFFT(u) = eta*exp(-alpha*k(u))/pi * real(sum(e));
end

function y = HestonCF(phi,kappa,theta,lambda,rho,sigma,T,S,r,q,v0)

%Retorna a função carcterítica de Heston para o depois usar na FFT
format long
% Preço spot logaritmizado
x = log(S);

% Parâmetros a, u, b, d, e g
a = kappa*theta;
u = -0.5;
b = kappa + lambda;
d = sqrt((rho*sigma*i*phi - b)^2 - sigma^2*(2*u*i*phi - phi^2));
g = (b - rho*sigma*i*phi + d) / (b - rho*sigma*i*phi - d);
c=1/g;

%Formulção de Heston
%G = (1 - g*exp(d*T))/(1-g);
%C = (r-q)*i*phi*T + a/sigma^2*((b - rho*sigma*i*phi + d)*T - 2*log(G));
%D = (b - rho*sigma*i*phi + d)/sigma^2*((1-exp(d*T))/(1-g*exp(d*T)));

%Opção
G = (1 - c*exp(-d*T))/(1-c);
C = (r-q)*i*phi*T + a/sigma^2*((b - rho*sigma*i*phi - d)*T - 2*log(G));   %NOTA: Acho que em ve
D = (b - rho*sigma*i*phi - d)/sigma^2*((1-exp(-d*T))/(1-c*exp(-d*T)));
```

```
%Função característica
y = exp(C + D*v0 + i*phi*x);
end
```

B. Preço de uma barrier option usando a representação com time-change

A seguir apresenta-se o método discutido em (5.9) para a avaliação de uma double digital option utilizando as séries infinitas de convergência rápida.

```
function [ I ] = DoubledigitaloptionII( S,T,K,D,N,theta,gamma,nu,lambda,sigma)

%Determinação de Z
%P=exp(10*sigma*sqrt(T));
P=S^2/D;
x=log(S);
k=log(K);
a=log(P);
b=log(D);

for n=1:N
    A(n)=exp(-a/2)*n*pi*(-1)^(n+1)/(a-b);
    B(n)=1/2*sin(n*pi*(k-b)/(a-b))+n*pi/(a-b)*cos(n*pi*(k-b)/(a-b));
    C(n)=1/4+n^2*pi^2/((a-b)^2);
    Z(n)=(A(n)+exp(-k/2)*B(n))/C(n);
    u(n)=1/8+(n^2*pi^2)/(2*(a-b)^2);
    v(n)=TransformadaLaplaceHeston(u(n),T,theta,gamma,nu,lambda);
    prod(n)=v(n)*sin(n*pi*(x-b)/(a-b))*Z(n);
end
soma=sum(prod);
```

```
I=exp(-0.1*T)*(2*exp(x/2)/(a-b))*soma;


function v =TransformadaLaplaceHeston(u,T,theta,gamma,nu,lambda)

%Retorna a Transformada de Laplace para o modelo de Heston

varrho=sqrt(theta^2+gamma^2*u);
v=(exp(theta*T/2)/(cosh(varrho*T/2)+(theta/varrho)*sinh(varrho*T/2)))^(2*theta*nu/(gamma^2))...
    *exp(-(lambda/varrho)*u*sinh(varrho*T/2)/(cosh(varrho*T/2)+(theta/varrho)*sinh(varrho*T/2))
end

function v =TransformadaLaplaceStein(u,T,lambda,xi,chi,kappa)

%Retorna a Transformada de Laplace para o modelo de Stein e Stein
%Para usar o modelo de Stein e Stein trocar a transformada de Laplace no programa
 DoubledigitaloptionII por esta

A=-xi/(kappa^2);
B=chi*xi/(kappa^2);
C=-u/(kappa^2*T);
a=sqrt(A^2-2*C);
b=-A/a;

L=-A-a*(sinh(a*kappa^2*T)+b*cosh(a*kappa^2*T))...
    /(cosh(a*kappa^2*T)+b*sinh(a*kappa^2*T));
M=B*((b*sinh(a*kappa^2*T)+b^2*cosh(a*kappa^2*T)+1-b^2)...
    /(cosh(a*kappa^2*T)+b*sinh(a*kappa^2*T))-1);
N=((a-A)/(2*a^2))*(a^2-A*B^2-B^2*a)*kappa^2*T...
    +(B^2*(A^2-a^2)/(2*a^3))*((2*A+a+(2*A-a)*exp(2*a*kappa^2*T))...
    /(A+a+(a-A)*exp(2*a*kappa^2*T)))...
    +(2*A*B^2*(a^2-A^2)*exp(a*kappa^2*T))/(a^3*(A+a+(a-A)*exp(2*a*kappa^2*T)))...
    -0.5*log(0.5*(A/a+1)+0.5*(1-A/a)*exp(2*a*kappa^2*T));

v=exp(L*lambda/2+M*sqrt(lambda)+N);
```

```
end
```

A seguir apresenta-se o método discutido em (5.10) para a avaliação de uma double barrier option utilizando as séries infinitas de convergência rápida.

```
function [ EOC ] = DoublebarrieroptionII( S,T,K,D,N,theta,gamma,nu,lambda,sigma)

%Determinação de Z

P=exp(10*sigma*sqrt(T));
x=log(S);
k=log(K);
a=log(P);
b=log(D);

%Determinação do somatório

for n=1:N
    Z(n)=((((2*n*pi)/(a-b))*(-1)^(n+1)*sinh((a-k)/2))-sin(n*pi*(k-b)/(a-b)))...
        /(exp(-k/2)*(1/4+(n^2*pi^2)/(a-b)^2));
    u(n)=1/8+(n^2*pi^2)/(2*(a-b)^2);
    v(n)=TransformadaLaplaceHeston(u(n),T,theta,gamma,nu,lambda);
    prod(n)=v(n)*sin(n*pi*(x-b)/(a-b))*Z(n);
end
soma=sum(prod);
EOC=(2*exp(x/2)/(a-b))*soma;
```

Bibliografia

[1] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy, 81(3)*, pages 637–654, 1973.

[2] S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies, 6(2)*, pages 327–343, 1993.

[3] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science 4(1)*, pages 141–183, 1973

[4] J. Cox, J. Ingersoll and S. Ross. A theory of the term structure of interest rates. *Econometria, 53(4)*, pages 187–201, 1985

[5] M. Escobar, P. Hieber and M. Scherer. Efficiently pricing double barrier derivatives in stochastic volatility models. *Review of Derivatives Research, 17*, pages 191–216, 2014

[6] P. Carr and R. Lee. Put-call symmetry: Extensions and applications. *Mathematical Finance, 19(4)*, pages 523–560, 2009

[7] P. Carr and D.B. Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of computational finance, 2*, pages 61–73, 1999

[8] E.Stein and J. Stein. Stock price distributions with stochastic volatility: An analytic approach. *The review of financial studies, 4*, pages 727–752, 1991

[9] O. Barndorff-Nielsen and N. Shephard. Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 63(2)*, pages 167–241, 2001

[10] P. Christoffersen, S. Heston and K. Jacobs. The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science, 55(12)*, pages 1914–1932, 2009

[11] G. Bakshi and D. Madan. Spanning and derivative-security valuation. *Journal of financial economics, 55(2)*, pages 205–238, 2000

[12] P. Hieber and M. Scherer. A note on first-passage times of continuously time-changed Brownian motion. *Statistics* & *Probability Letters, 82(1)*, pages 165–172, 2012

[13] Fabrice D. Rouah. The Heston Model and Its Extensions in Matlab and C. John Wiley & Sons, 2013

[14] J. Kienitz and D. Wetterau. Financial modelling: Theory, implementation and practice with MATLAB source. John Wiley & Sons, 2013

[15] A. Pelsser. Pricing double barrier options using Laplace transforms. *Finance and Stochastics, 4(1)*, pages 95–104, 2000